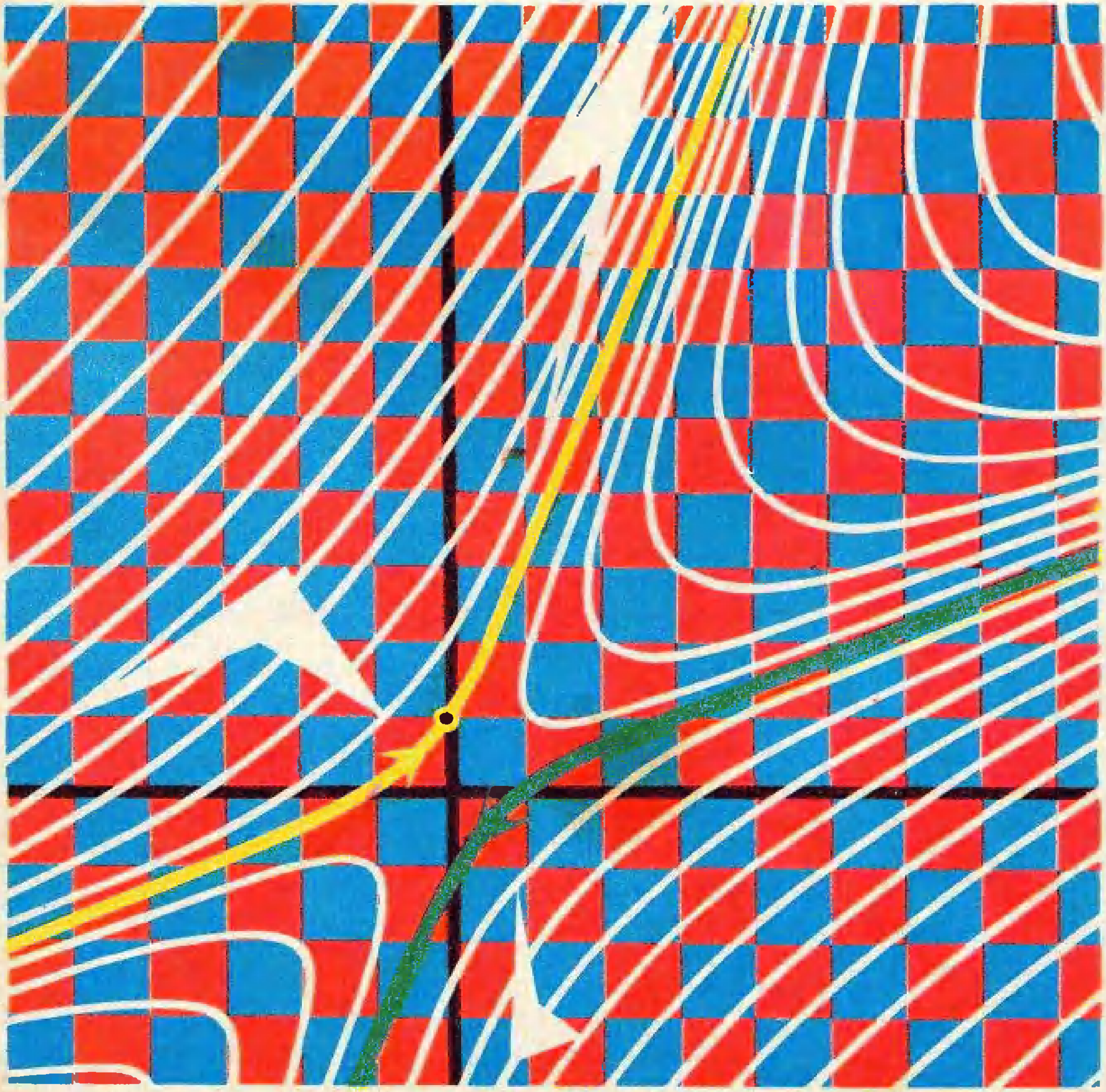
Научно-популярный физико-математический

Квант

7
1971
журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



В номере:

Великий закон — *В. И. Кузнецов* — 1

Архимед и квадратура параболы — *А. Д. Бендукидзе* — 7

Парадоксы реактивного движения — *М. С. Лившиц* — 11

Математический кружок
Принцип Дирихле — *А. И. Орлов* — 17

Задачник «Кванта»
Задачи — 22

Решения задач М39—М49; Ф45, Ф59—Ф65 — *Л. Г. Лиманов, В. Н. Березин, Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий* — 24

Практикум абитуриента
О задачах по фотометрии — *В. Е. Белонучкин* — 41

Вступительные экзамены по математике в Московском текстильном институте в 1970 году — *Т. И. Берхина, Э. М. Кан* — 45

Письменный экзамен по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1970 году — *А. Г. Кушниренко, С. В. Фомин* — 48

Информация
О математической подготовке абитуриентов — *М. Л. Смолянский, Г. Н. Дьяченко, В. В. Гольдберг* — 57

Уголок коллекционера
Марки, посвященные Марии и Пьеру Кюри — *А. В. Алтыкис* — 60

Рецензии. Библиография
Полезная книга — *М. Б. Балк* — 61

Ответы, указания, решения — 63

«Квант» для младших школьников
У нас в гостях Вася Смекалкин — *В. М. Розентуллер* — 64

Задача о мостах — *4-я стр. обложки*

ВЕЛИКИЙ ЗАКОН

В. И. КУЗНЕЦОВ

«Я сравнил силу, требующуюся для удержания Луны на ее орбите, с силой тяжести на поверхности Земли и нашел, что они почти отвечают друг другу. Все это было в два чумных года... Я был в расцвете моих сил и думал о математике и философии больше, чем когда-либо».

Исаак Ньютон

1665 и 1666 годы принесли Англии большое несчастье — страну посетила чума. Спасаясь от гибели, жители покидали большие города. Из Лондона в родную деревню Вульсторп возвратился молодой философ и математик Исаак Ньютон.

В то время его интересовал вопрос: почему Луна вращается вокруг Земли? Какая сила держит ее на орбите? Ведь если такой силы нет, Луна должна улететь (рис. 1).

Мы можем представить ход рассуждений Ньютона примерно так.

Яблоко всегда падает вниз. Почему? Земля притягивает его. Если материя притягивает другую материю, то должна существовать сила, пропорциональная количеству материи. Если это так, то сила притяжения Земли должна быть огромна. Значит, Луну, как и яблоко, притягивает Земля.

Тогда и родился закон всемирного тяготения.

Проделаем расчет, аналогичный расчетам Ньютона.

Луна движется по орбите, близкой к окружности. Время $T_л$, за которое она совершает один оборот вокруг Земли, равно 27,3 суток. Расстояние Земля — Луна примерно в 60 раз больше земного радиуса $R_з$. Если тело движется по окружности со скоростью v, оно испытывает центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Радиус лунной орбиты $R_л$ равен 384 400 *км*, скорость движения Луны по орбите $v = 2\pi \frac{R_л}{T_л} = 3650$ *км/ч*; тогда центростремительное ускорение a, испы-

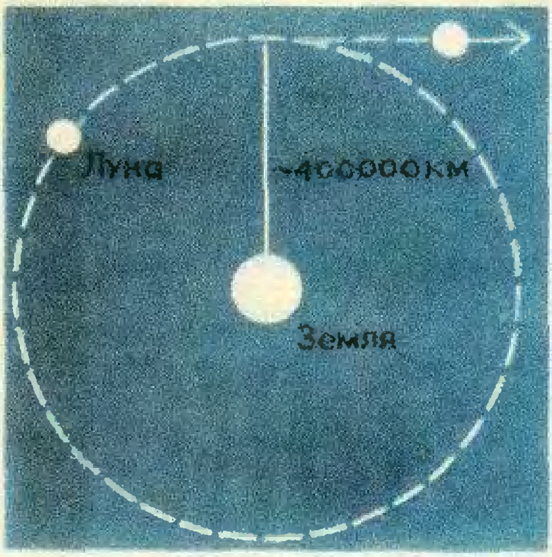


Рис. 1.

тываемое Луной, окажется равным $\frac{v^2}{R_Л} = 0{,}0027$ *м/сек*^{2}. А ведь яблоко притягивается Землей с гораздо большей силой. Земное ускорение силы тяжести равно 9,81 *м/сек*^{2}.

Почему же Земля притягивает Луну в тысячи раз слабее, чем яблоко? Роберт Гук с помощью изобретенных им пружинных весов пытался измерить изменение силы тяжести. Но на вершине горы груз растягивал пружину точно так же, как и на берегу моря. И все же Ньютон предположил, что земное тяготение ослабляется расстоянием. Высота гор невелика по сравнению с размерами Земли и тем более с расстоянием от Земли до Луны.

После исследования законов движения планет, установленных Иоганном Кеплером *), Ньютону удалось найти простое правило убывания силы тяготения с расстоянием. Это правило гласит: если центры двух шаров, масса которых равномерно распределена по их объемам, находятся на расстоянии r, то сила притяжения F между шарами направлена по линии, соединяющей центры шаров, пропорциональна произведению их масс m_1, m_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2};$$

γ в этой формуле — постоянная величина, ее можно определить только опытным путем.

Вернемся опять к притяжению Луны. Луна находится на расстоянии 60 земных радиусов, а яблоко удалено только на один земной радиус от центра Земли. Поэтому сила, а значит, и ускорение на лунной орбите в 60^2 раз меньше, чем у поверхности Земли:

$$a = \gamma \frac{M_З}{(60R)^2},$$

$$g = \gamma \frac{M_З}{R^2}.$$

Разделим первое из этих выражений на второе:

$$\frac{a}{g} = \frac{1}{3600}, \quad \text{или} \quad a = 0{,}0027 \text{ м/сек} \text{ *)}.$$

Полученная величина удивительно точно совпадает с ранее вычисленным значением центростремительного ускорения Луны.

Так Ньютону удалось проверить закон всемирного тяготения. Правда, в его вычислениях не было такого хорошего согласия: работая в Вульсторпе, Ньютон не располагал точным значением земного радиуса. Только через несколько лет эта величина была измерена с достаточной точностью.

Несмотря на полученное совпадение величин ускорений, Ньютон не был удовлетворен проверкой. Нужно было еще решить задачу о притяжении яблока, лежащего на Земле. Можно ли считать, что земной шар притягивает яблоко так, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в центре?

---

*) См. «Квант» № 1, 1971, стр. 20.

*) Постоянная тяготения γ сокращается — ее вовсе не нужно знать, чтобы убедиться в правильности закона тяготения, открытого Ньютоном.

Близкие к яблоку части притягивают его сильнее, чем далекие (рис. 2). Результирующую силу можно вычислить только с помощью интегрального исчисления, но в то время оно еще не было открыто. Изучение движения Луны было отложено на несколько лет. Ньютон занялся оптикой: шлифовал линзы, построил замечательный отражательный телескоп, с увлечением изучал оптические спектры... Но мысли о тяготении не покидали его. Потребовались годы на создание интегрального исчисления, и на его основе Ньютон доказал замечательную теорему: оболочка сферической формы с равномерно распределенной по ней массой притягивает тело, находящееся вне ее, как если бы вся масса оболочки находилась в центре сферы (рис. 3, *а*). Землю можно представить как набор сферических оболочек (рис. 3, *б*). Действие каждой оболочки не зависит от других, а сила тяготения не поглощается веществом Земли. Если принять эти два положения, из которых второе — одно из самых удивительных свойств гравитации, то естественно заключение, что яблоко притягивается Землей именно так, как предполагал Ньютон.

Итак, падение яблока на Землю и движение Луны по своей орбите вызвано одной причиной — земным притяжением. А какие силы управляют движением планет? Планеты движутся вокруг Солнца, значит, сила тяготения должна исходить от Солнца. Дальнейшее обобщение — любые два тела притягиваются по такому же закону.

В начале XVII века Иоганн Кеплер открыл законы движения планет. Первый закон Кеплера утверждал, что планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце. Смысл второго закона Кеплера в том, что планеты движутся по своим орбитам быстрее, когда приближаются к Солнцу, а удаляясь, начинают двигаться медленнее: линия, соединяющая планету и Солнце, «выметает» в равные времена равные площади.

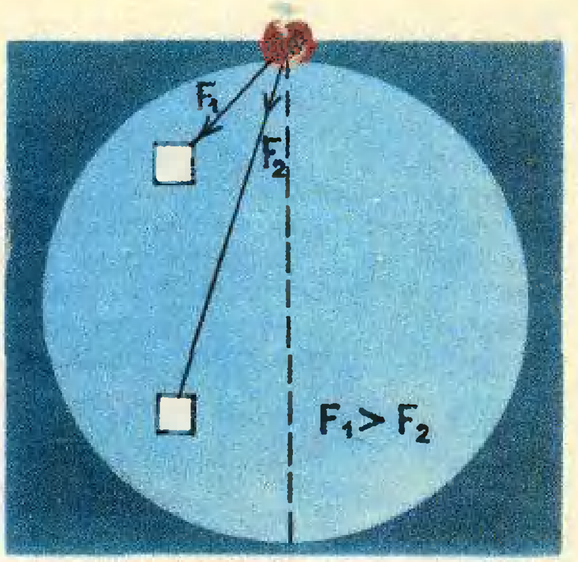


Рис. 2.

Квадраты времен обращений планет пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца — вот содержание третьего закона.

Кеплер вывел эти законы, основываясь на многолетних записях астрономических наблюдений. Ньютон, опираясь на свои законы движения и закон тяготения, смог теоретически получить законы Кеплера.

Однажды в лондонской кофейне встретились члены английского Королевского общества — знаменитый архитектор Кристофер Рен, Роберт

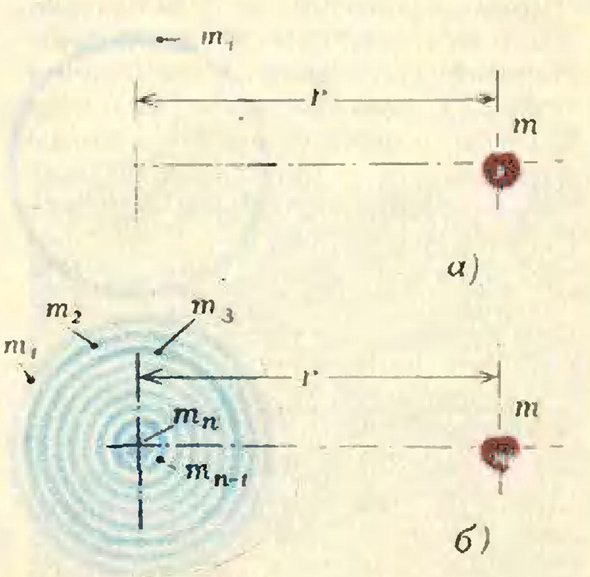


Рис. 3. $F = \gamma \frac{m \Sigma m_n}{r^2}$.

Гук и Эдмонд Галлей. Галлей рассказал, что ему удалось получить третий закон Кеплера, объединив закон тяготения и законы движения Ньютона, но только для случая круговых орбит. Движение по круговой орбите может происходить, если на планету действует внешняя сила, направленная к центру окружности и равная Mv^2/R. Эту силу создает притяжение между планетой и Солнцем. Поэтому $\gamma \frac{M_С M}{R^2} = \frac{Mv^2}{R}$. Если вспомнить, что скорость движения планеты по орбите $v = \frac{2\pi R}{T}$, то, подставив это выражение в предыдущую формулу, получим закон Кеплера:

$$\gamma \frac{M_С}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}, \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{T^2} = \text{const}.$$

Когда Галлей кончил свой рассказ, Рен предложил приз тому, кто докажет, что закон убывания тяготения обратно пропорционально квадрату расстояния справедлив и для движения по эллиптическим орбитам.

Галлей обратился к Ньютону. Ньютон ответил, что это им уже сделано, и в ноябре 1684 года рукопись с расчетами была в руках Галлея. На подготовку рукописи и ее печатание ушло несколько лет. Наконец в сентябре 1687 года книга Ньютона увидела свет. Она называлась «Математические начала натуральной философии». Законы, примененные к изучению планет солнечной системы, позволили получить важные предсказания. Так, Ньютон «взвесил» Солнце, выразив его массу в единицах земных масс:

$$\gamma \frac{M_С M_З}{R_З^2} = M_З \frac{v^2}{R_З} = M_З \frac{4\pi^2 R_З^2}{R_З T_З^2},$$

$$M_С = \frac{4\pi^2 R_З^3}{\gamma T_З^2},$$

$$\gamma \frac{M_З M_Л}{R_Л^2} = M_Л \frac{v^2}{R_Л} = M_Л \frac{4\pi^2 R_Л^2}{R_Л T_Л^2},$$

$$M_З = \frac{4\pi^2 R_Л^3}{\gamma T_Л^2},$$

где $R_З$ и $R_Л$ — радиусы орбит Земли и Луны соответственно.

Получился очень интересный результат. Луна — спутник Земли, а Земля — спутник Солнца. Масса спутника каждый раз сокращается. В первом уравнении, когда закон всемирного тяготения применен к Солнцу и Земле, сокращается масса Земли, а во втором — масса Луны. Так Ньютон выразил массы Земли и Солнца через легко доступные астрономическим измерениям величины — радиусы орбит и периоды обращения. Неизвестной ему оставалась величина γ. Но если взять отношение солнечной и земной масс, то постоянная γ сокращается и получается формула

$$\frac{M_С}{M_З} = \frac{R_З^3 T_Л^2}{R_Л^3 T_З^2} = \left[\frac{\text{расстояние Земля — Солнце}}{\text{расстояние Луна — Земля}}\right]^3 \times \left[\frac{1 \text{ месяц}}{1 \text{ год}}\right]^2.$$

Так Ньютону удалось выразить отношение масс Солнца и Земли через известные астрономам величины.

Чтобы вычислить массу Солнца в более привычных единицах, скажем килограммах, нужно было оценить массу Земли. Ньютон знал только ее объем. Средняя плотность вещества Земли в его время не была известна. Не вызывало сомнения только то, что плотность материков больше плотности воды. Но во сколько раз средняя плотность Земли превосходит плотность воды океана? Ньютон пришел к выводу, что средняя плотность Земли заключена между 5 *г/см³* и 6 *г/см³*. Только через девяносто лет сэр Генри Кавендиш «взвесил» Землю, измерив с помощью изящных крутильных весов величину γ. Плотность Земли оказалась равной 5,5 *г/см³*.

А как определить массу Луны? Ведь она сокращается во всех формулах. Все же Ньютон нашел способ оценить и эту величину.

Тысячелетиями загадкой для людей оставалась причина приливов в морях и океанах. Римляне связывали приливы с положением на небе Луны. «Была полная Луна, и поднялся большой прилив»,— читаем мы в записях Юлия Цезаря. Однако на вопрос: почему происходят приливы? — не было никакого ответа. Ньютон нашел правильное объяснение.

Рассмотрим движение трех тел одинаковой массы, свободно лежащих одно на другом (рис. 4). Пусть в какой-то момент времени на тела начнут действовать три силы $F_1 > F_2 > F_3$. Тогда *пластинка 3 начнет отставать*, а пластинка *1* будет опережать «сердечник» *2*. Если пластинки соединить пружинками с центральным телом, то растяжение пружин уравновесит силы $F_1 - F_2$, $F_2 - F_3$.

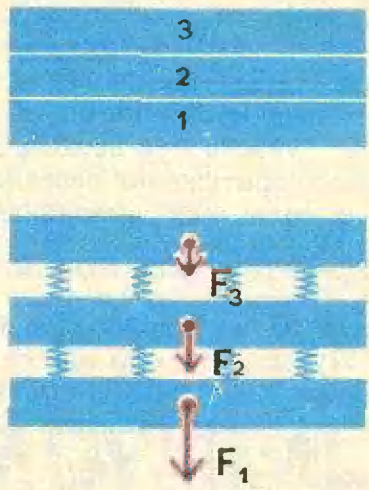


Рис. 4

Землю с ее гидросферой можно представить как «падающие» на Луну три тела: твердую сердцевину и два слоя воды — один, обращенный к Луне, и другой, находящийся на противоположной от Луны стороне. На эти условные «тела» со стороны Луны действуют разные силы. Рассмотрим действие лунного притяжения на единицу земной массы в точке *A* (рис. 5). Эта сила равна

$$\frac{[\text{постоянная тяготения} \times \text{масса Луны}]}{[\text{расстояние от } A \text{ до центра Луны}]^2} =$$

$$= \gamma \frac{M_л}{R^2 \cos^2 \alpha + (r - R \sin \alpha)^2} \approx$$

$$\approx \gamma \frac{M_л}{r^2} \left(1 + 2 \frac{R}{r} \sin \alpha \right).$$

В точке *K* $\sin\alpha = 1$ и сила притяжения $F_K = \gamma \frac{M_л}{r^2} \left(1 + 2\frac{R}{r}\right)$, а в точке *L* $\sin\alpha = -1$ и $F_L = \gamma \frac{M_л}{r^2} \left(1 - 2\frac{R}{r}\right)$. Таким образом, Луна притягивает разные части Земли с разной силой.

Земная «твердь» и водяная оболочка связаны «пружинами» тяготения. На единицу земной массы в центре Земли действует сила $F_ц = \gamma \frac{M_л}{r^2}$. Она-то и определяет движение твердой части Земли. Находящаяся в точке *L* океанская вода «отстает» при «падении» Земли на Луну — здесь на единицу массы действует сила $F_L - F_ц = -2\gamma \frac{M_л}{r^3} R$, меньшая $F_ц$. В точке *K* сила больше, чем $F_ц$, и в ее окрестности океанская вода стремится опередить твердую сердцевину. Этому препятствуют «пружины» земного тяготения. Лунное притяжение слегка «растягивает» эти пружины приливной силой $F = 2\gamma \frac{M_л}{r^3} R$. На противоположных сторонах Земли возникают приливные «горбы». Они стремятся сохранить по отношению к Луне одно и то же положение. Если бы Луна была неподвижна относительно Земли, а Земля не вращалась вокруг своей оси, то водяная оболочка сохраняла бы форму, вытянутую по направлению к Луне. Вследствие вращения Земли приливная

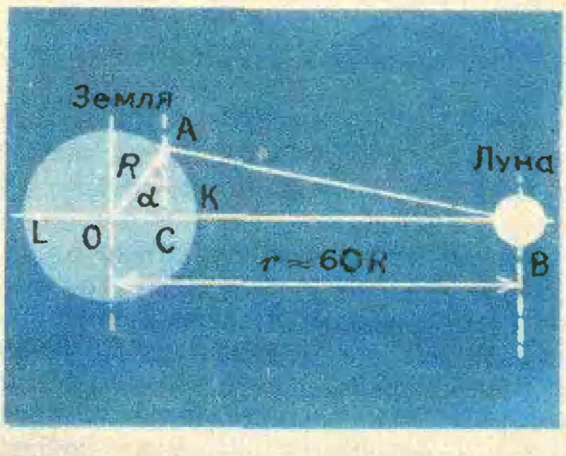


Рис. 5

волна движется относительно материков со скоростью 1800 *км/ч* и несколько отстает от движения Луны.

Притяжение Солнца во много раз сильнее лунного, но неоднородность солнечного притяжения невелика. Поэтому и солнечная приливная сила $F_С = 2\gamma \frac{M_С}{r_{СЗ}^3} R$ меньше лунной. Масса Солнца в 27 миллионов раз больше массы Луны, зато расстояние Солнце — Земля $r_{СЗ}$ в 389 раз больше r — расстояния Земля — Луна. Так что $F_С = 2\gamma \frac{27 \cdot 10^6 M_Л}{(389r)^3} R \approx 0{,}45 F_Л$, то есть «солнечные» приливы слабее лунных. Конечно, мы не различаем этих приливов. Два раза в месяц Луна и Солнце находятся на одной прямой с Землей, солнечная и лунная приливные силы складываются — наблюдается большой прилив. Если же Земля, Солнце и Луна расположены так, что направление Земля — Солнце составляет угол 90° с направлением Земля — Луна, то приливные силы Солнца и Луны ослабляют друг друга и наблюдается малый прилив. У затерянных в океане островов, где приливные явления не искажаются влиянием берегов, большие приливы поднимаются на 1,30 *м*, а малые — всего на 0,65 *м*. Если произвести расчеты, то можно по величинам большого и малого приливов оценить отношение солнечной и лунной масс.

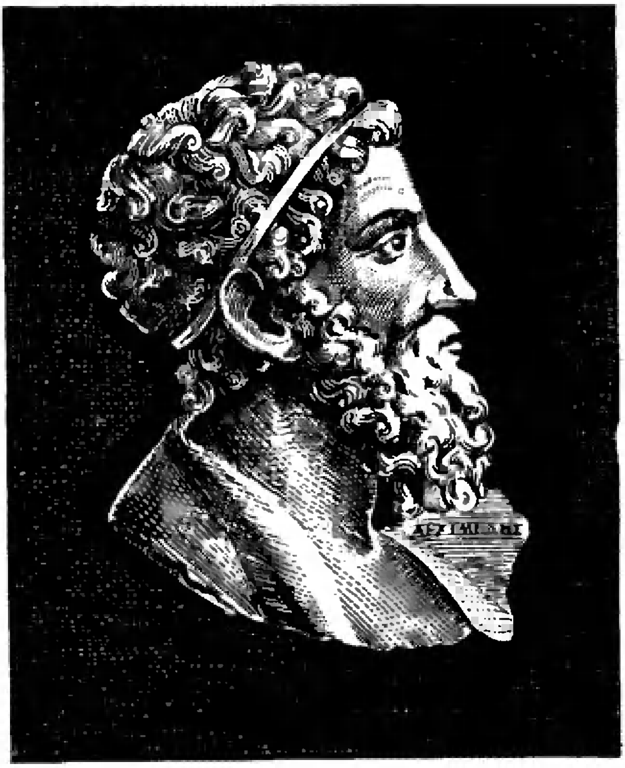
Так необычный «спутник» Луны — океанский прилив помог Ньютону рассчитать массу Луны. Расчет этот был весьма неточным. Задача осложнялась трением водяных масс о дно океана и другими трудноучитываемыми обстоятельствами. Точное значение массы было найдено уже после запуска спутников Луны. Измеренные периоды обращения и характеристики траектории «лунников» дали возможность с большой точностью определить массу, вычисленную Ньютоном лишь приблизительно. По движению искусственных спутников Луны ученые определили, что лунная масса распределена неравномерно по ее объему — законы Кеплера выполняются для спутников Луны приближенно.

До Ньютона астрономы считали, что кометы пролетают только один раз через солнечную систему. Однако Ньютон показал, что кометы могут двигаться по замкнутым эллиптическим орбитам. Особенность их орбит— сильная вытянутость. Поэтому кометы уходят на большие расстояния от Солнца и период обращения их весьма велик. Эдмонд Галлей сумел рассчитать время возвращения одной из самых знаменитых комет, записи о появлении которой сохранились с древнейших времен. Расчеты подтвердились — комета возвращалась в предсказанные Галлеем сроки. Ее можно наблюдать каждые 76 лет. В 1986 году эта комета вновь будет видна с Земли. Только один астроном Иоганн Галле, проживший почти сто лет, дважды наблюдал комету Галлея. Возвращение комет — еще одно подтверждение закона всемирного тяготения.

Решения многих других замечательных проблем, в которых применялся закон всемирного тяготения, содержались в «Математических началах»: это и расчет прецессии земной оси, и доказательство того, что любой камень, брошенный на Земле, движется по эллипсу, один из фокусов которого — центр Земли, и, наконец, исследование влияния взаимного тяготения планет на их движение. Влияние планет невелико по сравнению с солнечным тяготением, однако такая планета, как Юпитер, изменяет характер орбиты соседнего Сатурна, или, как говорят астрономы, возмущает его движение.

Уже третье столетие законы Ньютона используются при расчетах станков и артиллерийских орудий, траекторий спутников Земли и ракет. Математические формулы, написанные более двух веков назад, закладываются в счетно-решающие машины самой новейшей конструкции, неопровержимо подтверждающие своими расчетами справедливость этих законов.

А. Д. Бендукидзе



АРХИМЕД И КВАДРАТУРА ПАРАБОЛЫ

Еще в глубокой древности ученые занимались вычислением площадей. Общего метода тогда еще не существовало. (Такой метод дает нам интегральное исчисление.) Поэтому при вычислении площади фигуры использовались ее специфические свойства. В статье рассказывается, как Архимед, используя свойства параболы, вычислил площадь параболического сегмента.

Кому не известно имя Архимеда? Этот великий мыслитель оставил неизгладимый след в истории человечества. Исследователи его творчества с восхищением говорят о нем как о великом инженере, об астрономе-наблюдателе, не имеющем себе равных, о гениальном математике, о человеке, знающем все тайны природы...

Математические работы Архимеда подкупают читателя ясностью мысли, изяществом, доведенной до совершенства техникой вычислений. Известный греческий историк Плутарх пишет:

«Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед».

Не является исключением и одна из первых математических работ Архимеда — «Квадратура параболы».

Эта работа посвящена вычислению площади параболического сегмента, то есть фигуры, ограниченной параболой и прямой, и представляет, в сущности, доказательство следующей теоремы:

Площадь параболического сегмента равна четырем третьим площади треугольника, имеющего с сегментом общее основание и высоту.

Работа естественным образом делится на две части. В первой части Архимед показывает, как эта теорема была им обнаружена при помощи механики, а именно при помощи им же установленного «закона рычага», во второй же части дает ее геометрическое доказательство.

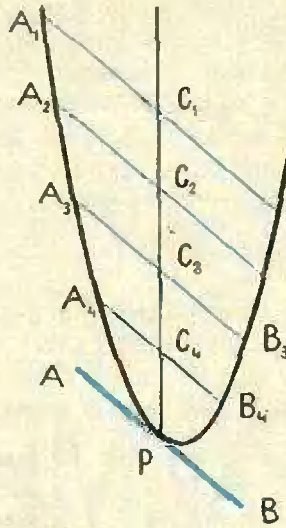


Рис. 1.

Мы познакомим читателя с содержанием второй части работы.

1. Сформулируем одно замечательное свойство параболы *), на котором основано все дальнейшее изложение.

Если прямая AB касается параболы в точке P и хорды A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... параллельны этой касательной, то середины хорд — точки C_1, C_2, C_3, ... —лежат на одной прямой; эта прямая параллельна оси параболы и проходит через точку P (рис. 1).

Кроме того,

$$\frac{A_1C_1^2}{PC_1} = \frac{A_2C_2^2}{PC_2} = \frac{A_3C_3^2}{PC_3} = \ldots \quad (1)$$

Попробуйте доказать эти свойства параболы сами.

2. Рассмотрим теперь параболический сегмент, ограниченный дугой параболы APB и хордой AB (рис. 2).

Точку параболы P, касательная в которой параллельна хорде AB, назовем вершиной сегмента, а саму хорду AB — основанием сегмента. C — середина основания. Согласно свойству (1) прямая PC параллельна оси параболы.

*) Напомним, что параболой называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки и не проходящей через нее прямой. В соответствующим образом подобранной системе координат она задается уравнением $y=ax^2$.

Впишем в сегмент треугольник APB и опишем около сегмента параллелограмм $ABMN$ ($AN \parallel BM \parallel PC$).

Так как площадь треугольника APB равна половине площади параллелограмма $ABMN$, она больше половины площади сегмента, и поэтому сумма площадей двух оставшихся по краям сегментов меньше половины площади всего сегмента. Если в эти оставшиеся сегменты тем же способом вписать треугольники, то сумма их площадей будет больше половины суммы площадей самих сегментов, и поэтому сумма площадей оставшихся после второго вписывания четырех сегментов будет меньше одной четверти площади данного сегмента. Если далее в эти четыре сегмента тем же способом вписать треугольники, то вне этих треугольников останутся восемь маленьких сегментов, сумма площадей которых будет меньше одной восьмой площади данного сегмента, и т. д.

Таким образом, продолжая этот процесс, в сегмент можно будет вписать такой многоугольник, что сумма площадей сегментов, оставшихся вне этого многоугольника, будет сколь угодно малой.

3. Разделим отрезок AC пополам и через точку деления D проведем прямую DE, параллельную PC (рис. 3). Докажем, что

$$PC = \frac{4}{3}ED. \quad (2)$$

В самом деле, если провести $EF \parallel AC$, то согласно равенствам (1) можем написать, что $\frac{AC^2}{PC} = \frac{EF^2}{PF}$.

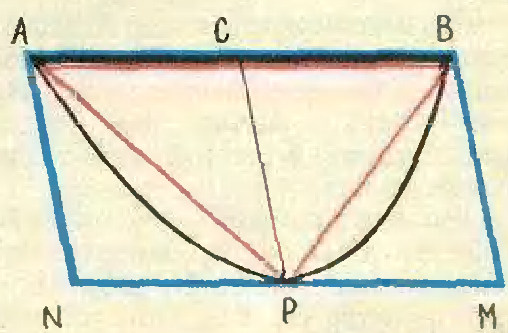


Рис. 2.

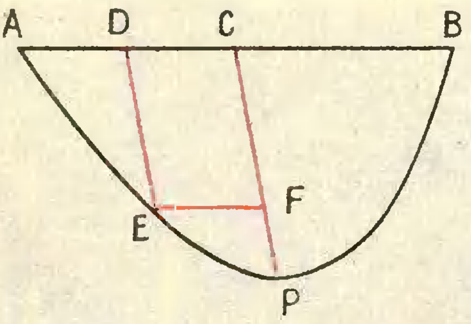


Рис. 3.

Поскольку $AC=2EF$, $PC=4PF$. Таким образом, $FC=ED=3PF$; отсюда уже получается требуемое равенство.

4. После того как в сегмент был вписан треугольник APB, по краям осталось два сегмента. Впишем в эти сегменты тем же способом треугольники AEP и PKB (рис. 4). Докажем, что площадь треугольника APB в восемь раз больше площади каждого из этих треугольников. Для доказательства заметим, что если через вершину E сегмента AEP провести прямую ED, параллельную оси параболы, она по свойству 1 разделит хорду AP, а следовательно, и отрезок AC пополам. Таким образом, $AD=DC$. Далее, так как $PC=2LD$, из равенства (2) следует, что $3\,LD=2\,ED$. Отсюда в свою очередь получаем, что

$$LD=2EL. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь треугольники ADL и ALE. Их основания DL и EL лежат на одной прямой, а вершина A — общая. Поэтому с учетом равенства (3) имеем $S_{\triangle ADL}=2S_{\triangle ALE}$.

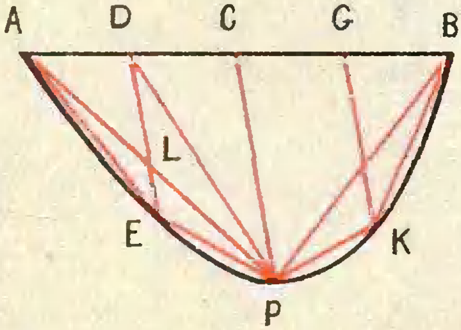


Рис. 4.

Подобным же образом, так как основания DL и LE треугольников DLP и LEP лежат на одной прямой, а P — их общая вершина, имеем $S_{\triangle DLP}=2S_{\triangle LEP}$.

Из последних двух равенств $S_{\triangle APD}=2S_{\triangle AEP}$ и учитывая, что $S_{\triangle APB}=4S_{\triangle APD}$, получим окончательно $S_{\triangle APB}=8S_{\triangle AEP}$.

Аналогично доказывается и второе равенство: $S_{\triangle APB}=8S_{\triangle PKB}$.

Если площадь треугольника APB обозначить через s_1, а сумму площадей треугольников AEP и PKB — через s_2, то согласно доказанному $s_1=4s_2$. На рисунке 5 эти площади окрашены соответственно оранжевым и синим.

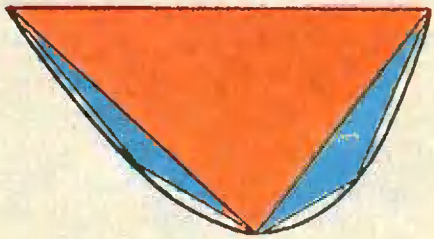


Рис. 5.

5. Продолжим процесс вписывания треугольников. Площадь первого треугольника обозначим через s_1, сумму площадей треугольников, вписанных на втором шаге, — через s_2, сумму площадей четырех треугольников, вписанных на третьем шаге,— через s_3 и т. д.

Получим бесконечную числовую последовательность

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots, \qquad (4)$$

в которой каждый член, начиная со второго, в четыре раза меньше предыдущего *), то есть

$$s_2=\frac{1}{4}s_1,\quad s_3=\frac{1}{4}s_2,\quad \ldots,$$

$$s_{n+1}=\frac{1}{4}s_n,\quad \ldots \qquad (5)$$

*) Таким образом, эта последовательность образует геометрическую прогрессию. Вы легко можете вычислить ее сумму. Однако для греческих математиков эта задача представляла определенные трудности.

Докажем одно замечательное свойство этой последовательности, а именно докажем, что для любого n справедливо следующее равенство:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n + \frac{4}{3} s_n = \frac{4}{3} s_1. \qquad (6)$$

В самом деле, так как $4(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n) = 4s_1 + (4s_2 + 4s_3 + \ldots + 4s_{n-1} + 4s_n)$, из соотношений (5) следует, что $4(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}) + 4s_n = 4s_1 + (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1})$, то есть $3(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}) + 4s_n = 4s_1$.

Равенство (6) получается отсюда делением на 3.

6. Теперь уже можно доказать, что площадь параболического сегмента $S = \frac{4}{3} s_1$.

Архимед доказывает это равенство так называемым «методом исчерпывания». Этот метод, принадлежащий одному из крупнейших греческих математиков — Евдоксу (IV век до н. э.), заменял во времена Архимеда метод предельного перехода.

Предположим, что $S > \frac{4}{3} s_1$ или $S < \frac{4}{3} s_1$.

Докажем, что это невозможно.

Предположим сначала, что

$$S > \frac{4}{3} s_1. \qquad (7)$$

Мы уже отмечали, что, продолжая процесс вписывания, можно добиться того, чтобы сумма площадей оставшихся сегментов была сколь угодно малой. Это значит, что, подбирая соответствующим образом n, разность $S - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n)$ можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа. Подберем n так, чтобы выполнялось неравенство $S - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n) < S - \frac{4}{3} s_1$. Тогда $s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n > \frac{4}{3} s_1$, а это, согласно равенству (6), невозможно*). Таким образом, неравенство (7) неверно.

Предположим теперь, что

$$S < \frac{4}{3} s_1. \qquad (8)$$

Так как члены последовательности (4) стремятся к нулю, n можно выбрать так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\frac{4}{3} s_n < \frac{4}{3} s_1 - S.$$

Из этого неравенства с учетом равенства (6) получим

$$S < s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n,$$

что, конечно же, невозможно.

Итак, и неравенство (8) неверно. Тем самым доказано, что $S = \frac{4}{3} s_1$.

7. Сделаем в заключение следующее замечание.

Как известно, древние греки под квадратурой фигуры понимали построение квадрата, равновеликого этой фигуре. Задача о квадратуре в «греческом смысле» не всегда имеет решение. Доказано, например, что для круга она неразрешима. То есть нельзя построить (при помощи циркуля и линейки) квадрат, равновеликий данному кругу.

Полученный Архимедом результат примечателен и в том смысле, что показывает возможность положительного решения задачи о квадратуре параболического сегмента: зная основание и высоту сегмента, всегда можно построить квадрат, равновеликий этому сегменту.

---

*) Мы предположили, что $S > \frac{4}{3} s_1$, следовательно, $S - \frac{4}{3} s_1$ — положительное число.

ПАРАДОКСЫ РЕАКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

Мощность ракетного двигателя

При работе реактивного двигателя химическая энергия топлива преобразуется в кинетическую энергию с определенным коэффициентом полезного действия: часть этой химической энергии расходуется на различные тепловые потери (нагрев стенок камеры двигателя, тепло, уносимое истекающими газами, и др.). Отношение полученной кинетической энергии к химической энергии сгоревшего топлива называется внутренним (или эффективным) коэффициентом полезного действия $\eta_{эфф}$. Обычно он бывает порядка $0{,}3 \div 0{,}5$.

Пока умышленно не уточнялось — кинетическая энергия чего?

Рассмотрим систему координат, связанную с ракетой. За очень маленькое время Δt из сопла ракеты будет выброшена масса газа Δm. Если Δt достаточно мало, то скорость ракеты практически не меняется и систему координат, связанную с ней, можно считать инерциальной. В этой системе координат ракета неподвижна, а значит, химическая энергия топлива переходит в кинетическую энергию газов.

Пусть u — относительная скорость истечения газов из сопла ракеты; тогда кинетическая энергия массы газа Δm, вылетающего из сопла ракеты,

$$E_{\Delta m} = \frac{\Delta m u^2}{2}.$$

Так как мощность равна работе, совершаемой в единицу времени, то выражение для мощности мы получим, если вместо величины отбрасываемой массы газов подставим в наше выражение секундный расход массы μ.

Таким образом, мощность двигателя ракеты

$$P_{дв} = \frac{\mu u^2}{2}.$$

Это же выражение можно было бы получить и другим путем, рассматривая движение ракеты и газов в подвижной системе координат. При этом полученная за время работы ракетного двигателя кинетическая энергия E расходуется на изменение кинетической энергии выбрасываемых газов $\Delta E_{газа}$ и изменение кинетической энергии ракеты:

$$\Delta E = \Delta E_{газа} + \Delta E_{ракеты}.$$

Найдем отдельно каждый из членов этой суммы.

1. Пусть скорость ракеты до выброса топлива Δm равна v. Тогда

$$\Delta E_{газа} = \frac{\Delta m (u-v)^2}{2} - \frac{\Delta m v^2}{2},$$

где $\frac{\Delta m v^2}{2}$ — кинетическая энергия, которой обладала отбрасываемая масса газов до ее истечения (когда она находилась в ракете и двигалась вместе с ней со скоростью v), $\frac{\Delta m (u-v)^2}{2}$ — кинетическая энергия, которой обладает отбрасываемая масса газов после ее истечения из сопла ракеты с относительной скоростью u (так как в неподвижной системе координат ее скорость будет $u-v$).

2. Теперь займемся вторым членом — $\Delta E_{ракеты}$. Так как за время Δt из сопла выбрасывается масса газа Δm, унося количество движения $\Delta m u$, то на эту массу газа в соответствии со II законом Ньютона действует сила

$$F = \frac{\Delta m u}{\Delta t} = \mu u.$$

По III закону Ньютона такая же по величине сила, но направленная в противоположную сторону, действует на ракету — это и есть сила тяги двигателя. Если за время Δt ракета пролетела расстояние ΔS, то сила тяги двигателя совершила работу, изменяя кинетическую энергию ракеты на величину

$$\Delta E_{ракеты} = F \cdot \Delta S = \mu u \Delta S.$$

Значит,

$$\Delta E = \mu u \Delta S + \frac{\Delta m (u-v)^2}{2} - \frac{\Delta m v^2}{2}.$$

Соответственно для мощности, разделив ΔE на Δt, мы получим

$$P_{дв} = \mu u v + \frac{\mu (u-v)^2}{2} - \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu u^2}{2},$$

то есть то же самое выражение, что и раньше, когда рассматривалась система координат, связанная с ракетой.

Итак, мощность ракетного двигателя $P_{дв} = \frac{\mu u^2}{2}$ и при стационарной работе двигателя остается постоянной.

Запомним это.

Полезная механическая мощность двигателя
(мощность, развиваемая силой тяги)

Основная задача двигателя — увеличивать кинетическую энергию ракеты. Мы видели, что сила тяги равна $F_т = \mu u$, а изменение кинетической энергии ракеты за время Δt равно $\Delta E_{ракеты} = \mu u \cdot \Delta S$. Поэтому полезная мощность тяги двигателя равна

$$W_п = \frac{\Delta E_{ракеты}}{\Delta t} = \mu u \frac{\Delta S}{\Delta t} = \mu u v.$$

При стационарной работе двигателя, то есть при постоянном секундном расходе массы и постоянной скорости истечения газов, полезная мощность двигателя растет пропорционально скорости ракеты.

На первый взгляд этот вывод кажется парадоксальным. В самом деле, поскольку формула, которую мы получили, справедлива при любой скорости ракеты, то она будет справедлива и при такой скорости ракеты, при которой величина получающейся полезной мощности станет больше мощности, развиваемой ракетным двигателем за счет энергии топлива!

Из сравнения выражений для мощности двигателя и для полезной мощности видно, что при $v = \frac{u}{2}$ полезная мощность становится равной мощности ракетного двигателя. Следовательно, при дальнейшем увеличении скорости ракеты она будет больше мощности двигателя. Такова та количественная граница, где появляется указанный парадокс.

Для того чтобы разобраться в этом парадоксе, нам придется рассмотреть, что такое внешний (полетный) коэффициент полезного действия. Одновременно при этом мы выясним, почему ракетный двигатель целесообразно характеризовать не мощностью, как это принято для других двигателей, а развиваемой им силой тяги.

Внешний коэффициент полезного действия ракетного двигателя

Внутренний коэффициент полезного действия не может полностью характеризовать эффективность ракетного двигателя, так как в общем случае, как мы видели выше, энергия топлива распределяется между ракетой и выбрасываемыми газами. Поэтому в теории вводится еще так называемый внешний (или полетный) к.п.д., причем в литературе можно встретить два отличающиеся друг от друга определения и соответствующие выражения для внешнего к.п.д. Каждое из этих определений к.п.д. с различных точек зрения характеризует механику полета ракеты. Рассмотрим эти определения, указывая одновременно на их логическое обоснование.

Первое определение внешнего к. п. д.

Полет с работающим двигателем является полетом тела переменной массы. Поэтому, помимо мощности ракетного двигателя, энергетические соотношения должны учитывать еще и обмен энергией между ракетой и покидающими ее газами, то есть всю мощность, которой мы располагаем. Изменение энергии ракеты может происходить как за счет химической энергии топлива (работы силы тяги), так и за счет энергии, которой обладала выбрасываемая масса газов до ее истечения из ракеты. Она тоже может быть передана ракете.

Итак, внешний (полетный) к.п.д. можно определить как отношение работы силы тяги к сумме механической энергии, появляющейся за счет сгорания топлива, и энергии, которой обладала масса газов до ее истечения из ракеты. Это отношение можно заменить отношением соответствующих мощностей (результат не изменится). Значит,

$$\eta' = \frac{\mu u v}{\frac{\mu u^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2}} = 2\,\frac{\frac{v}{u}}{1 + \frac{v^2}{u^2}}.$$

Обозначив отношение $\frac{v}{u} = R$, получим окончательно

$$\eta' = \frac{2R}{1 + R^2}.$$

Исследуем теперь эту формулу. Значение η' максимально, когда $\frac{1}{\eta'}$ минимально, то есть когда минимально выражение $\frac{1 + R^2}{R} = \frac{1}{R} + R$. Но $\frac{1}{R} + R \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{R} \cdot R}$ (среднее арифметическое двух чисел a и b больше среднего геометрического или равно ему, если $a = b$). Значит, $\frac{1}{R} + R$ минимально при $\frac{1}{R} = R$ (или, что то же, при $\frac{1}{R} + R = 2$). Это означает, что максимум η' достигается при $R = 1$ и при этом $\eta' = 1$.

Физически это совершенно ясно: при $v = u$ истекающая масса газа обладает кинетической энергией, равной нулю, то есть полностью отдает

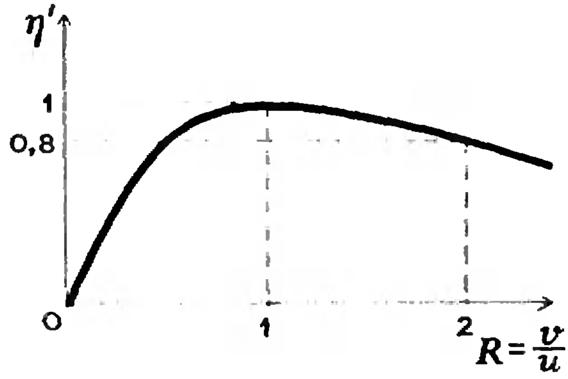


Рис. 1.

кинетическую энергию, которую она имела раньше, ракете.

График η' имеет вид, показанный на рисунке 1.

Уменьшение полетного к.п.д. при $v>u$ объясняется тем, что опять появляется и начинает возрастать энергия, уносимая струей газа.

Второе определение внешнего к. п. д.

При втором определении внешнего к.п.д. к нему подходят следующим образом.

Единственным источником приращения кинетической энергии системы «ракета + отбрасываемые газы» является работа ракетного двигателя, то есть энергия, полученная за счет перехода химической энергии топлива в механическую энергию топлива и ракеты. А под полезной работой нужно понимать ту работу, которая идет на приращение кинетической энергии самой ракеты.

При этом внешний к.п.д. определяется как отношение полезной работы к полной механической энергии, получаемой в ракетном двигателе за счет химической энергии топлива.

Определим величину полезной работы в принятом здесь понимании.

Сила тяги производит над ракетой работу, которая увеличивает кинетическую энергию ракеты. Но, с другой стороны, масса газа, покидающая ракету, уменьшает кинетическую энергию ракеты на ту величину, которой эта масса газа обладала (имея, так сказать, свой вклад в общую энергию ракеты) до ее истечения. Таким образом, полезная мощность равна $\mu uv - \frac{\mu v^2}{2}$.

Следовательно, по второму определению

$$\eta'' = \frac{\mu uv - \frac{\mu v^2}{2}}{\frac{\mu u^2}{2}} = 2R - R^2 .$$

Нарисуем график зависимости $\eta'' = 2R - R^2 = R\,(2-R)$ от R. Это парабола, пересекающая ось R в точках $R=0$ и $R=2$, с максимумом при $R=1$ (рис. 2). То есть максимум η'' достигается тогда же, когда и максимум η',— при $R=1$ (при этом на приращение кинетической энергии движущейся вперед ракеты расходуется вся механическая энергия ракетного двигателя, ибо отбрасываемая масса газа обладает нулевой скоростью и не уносит с собой никакой энергии). Из графика видно, что при $R>2$ $(v>2u)$ $\eta''<0$.

Вот тут, при рассмотрении второго определения к.п.д. ракетного двигателя, и раскрывается еще одна важная особенность физики ракетного движения: к.п.д. ракетного двигателя, рассматриваемый с точки зрения изменения кинетической энергии

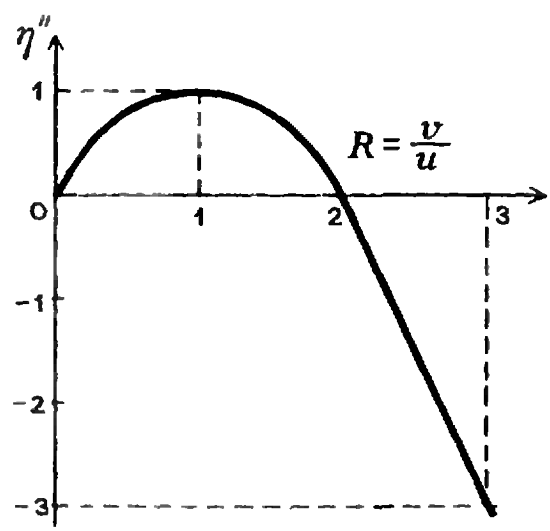


Рис. 2.

движущейся ракеты после достижения значения скорости полета ракеты $v=2u$, становится отрицательным! Еще один парадокс...

В чем же разгадка приведенных парадоксов?

1. Первый «парадокс», то есть тот факт, что мощность, развиваемая силой тяги, непрерывно растет с увеличением скорости ракеты и при $v > \frac{u}{2}$ становится больше мощности ракетного двигателя, объясняется, как видно из первого определения внешнего к.п.д., наличием обменной части, мощностью которой мы располагаем. Она тоже возрастает с увеличением скорости ракеты. Таким образом, при увеличении скорости ракеты покидающие ракету газы становятся, так сказать, все более «богатыми» и отдают ракете все большую величину (абсолютную, а не относительную) той энергии $\frac{\mu v^2}{2}$, которой они располагали до истечения из ракеты. Вылетающие из сопла ракеты газы отдают ракете ту часть энергии, которая была запасена раньше. Это и приводит к тому, что мощность, развиваемая силой тяги, непрерывно растет и при $v > \frac{u}{2}$ становится даже больше мощности, получаемой за счет химической энергии топлива.

2. Второй «парадокс» объясняется тоже довольно просто. Когда скорость ракеты становится больше двойной скорости истечения газов ($v>2u$), энергия, уносимая газом, возрастает настолько, что истекающая струя газа уносит не только всю энергию, создаваемую в данный момент ракетным двигателем, но и часть энергии, которой обладала система «ракета — газ» до этого момента (накопленную за предыдущую «историю» полета). Или, если подойти несколько иначе к пояснению физического смысла этого «парадокса»: уменьшение кинетической энергии ракеты за счет уменьшения ее массы (за счет «похудания») больше, чем увеличение кинетической энергии за счет увеличения скорости ракеты. Итак, двигатель работает, а кинетическая энергия ракеты уменьшается!

Но в том-то и дело, что назначение ракетного двигателя — придать необходимую скорость полезному грузу, а не сообщить ракете какую-то максимальную кинетическую энергию. Вот почему ракетный двигатель и целесообразно характеризовать развиваемой им силой тяги, которая как раз и показывает, как быстро можно сообщить необходимую скорость полезному грузу. Кроме того, величина силы тяги показывает, можно ли вообще осуществить запуск ракеты: сила тяги должна превышать исходный вес ракеты. Конечно, это не исключает возможности энергетического подхода к проблеме реактивного движения при единственно правильном с точки зрения назначения ракетного двигателя первом определении внешнего к.п.д.

Следует подчеркнуть, что движение ракеты при отрицательном значении внешнего к.п.д. (по второму определению) не является только теоретически возможным случаем, а имеет место в практике космических полетов. Действительно, максимальная достигнутая сейчас скорость истечения газов, согласно имеющимся данным,

$$u_{\max}=4000 \text{ м/сек}.$$

Отсюда видно, что уже по достижении 1-й космической скорости ракета начнет двигаться с уменьшением кинетической энергии:

$$v_1 \approx 8000 \text{ м/сек} = 2u_{\max}.$$

Увеличение скорости истечения газов из ракеты отодвигает границу того изменения массы ракеты (ее «похудания»), при котором начинает уменьшаться кинетическая энергия летящей вперед части ракеты. Для фотонной ракеты, например, такая граница вообще недостижима.

Итак, ракетный двигатель целесообразно характеризовать его силой тяги. Это резко отличается от привычной ситуации, скажем, для автомобильного или самолетного двигателя, служащих для обеспечения движения в среде, обладающей сопротивлением.

В последнем случае именно мощность двигателя является его важнейшей характеристикой, так как чем мощнее двигатель, тем большую скорость движения данного тела он может поддерживать, преодолевая соответственно увеличивающееся сопротивление среды, то есть компенсируя потери энергии на преодоление сопротивления среды.

В процессе полета ракеты с работающим двигателем относительная кинетическая энергия (кинетическая энергия на единицу массы) остающейся части ракеты непрерывно увеличивается вместе со скоростью (эффективность этого процесса характеризует полетный к.п.д. в первом определении), хотя кинетическая энергия ракеты с новым (оставшимся) запасом топлива при скорости $v > 2u$ меньше кинетической энергии ракеты с топливом до того, как выбрасываемая масса газа покидает ракету.

ФОРУМ АСТРОНОМОВ И ГЕОДЕЗИСТОВ

Шесть ноябрьских дней (23—28. XI. 1970) в актовом зале Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова (Ленина) проходил очередной V съезд Всесоюзного астрономо-геодезического общества (ВАГО) при АН СССР.

ВАГО является добровольной научно-общественной организацией, занимающейся работами в области астрономии, геодезии и картографии. Оно было создано в 1932 году. В состав Общества входят 55 отделений, объединяющих 5640 действительных членов, 197 членов-коллективов (предприятий, учреждений и др.) и 1040 членов юношеской секции.

В работе V съезда ВАГО участвовало более 600 человек со всех концов страны. На съезде были рассмотрены организационные вопросы (отчет Центрального совета, выборы руководящих органов Общества и принятие решений). На пленарных заседаниях и секциях были заслушаны научные доклады и сообщения виднейших ученых страны и астрономов-любителей.

На юношеской секции съезда в сообщениях С. С. Войкова, В. В. Мартыненко, Б. Г. Пшеничнера, В. В. Чистякова, С. С. Новикова и др. было подробно рассказано о работе, проведенной членами этой секции. Согласно Уставу ВАГО члены юношеской секции имеют право:

«а) участвовать с совещательным голосом в съездах, конференциях, сессиях, совещаниях и собраниях Общества;

б) пользоваться обсерваториями, лабораториями, библиотекой, архивами и коллекциями Общества;

в) носить значок члена Общества.»*)

За период между IV и V съездами ВАГО члены юношеской секции, которые работали при 31 отделении Общества, принимали самое активное участие в научно-любительских работах по изучению переменных звезд, наблюдению Солнца, серебристых облаков, метеоров, искусственных спутников Земли, планет, в атмосферном зондировании, обследовании кратероподобных структур, в исследованиях астроклимата — совокупности атмосферных явлений, ограничивающих эффективность крупных телескопов. В юношеских секциях Московского, Новосибирского и Крымского отделений Общества и в Угличском филиале Ярославского отделения были сконструированы и изготовлены электрофотометры, фотографические камеры, электрополяриметры. В Крымской и Азербайджанской секциях юные астрономы весьма успешно занимаются любительским телескопостроением, изготовляют зеркала для любителей-астрономов других городов.

Большое внимание уделяется организации различных астрономических экскурсий школьников. Регулярно проводятся метеорные экспедиции, организуемые в Крыму

*) Прием в члены юношеских секций производится отделениями общества или их филиалами на основании письменного заявления вступающего и рекомендации одного действительного члена ВАГО или учебного заведения, предприятия или комсомольской организации.

(Окончание см. на стр. 21)

А. И. Орлов

В 1969 и 1970 годах под Смоленском работала летняя физико-математическая школа. В ней занимались 200 ребят, перешедших в 9—10 классы. Школа была организована Советом молодых ученых МГУ и Смоленским обкомом ВЛКСМ. Занятия вели студенты и аспиранты физфака и мехмата. Основной итог — ребята перестали бояться незнакомых задач.

Приведем расширенную запись одного из занятий по математике. Заметим, что почти все преподававшие математику — питомцы и сотрудники Вечерней математической школы при МГУ (о ней рассказывалось в «Кванте» № 3 за 1970 год), поэтому статья хорошо показывает стиль работы ВМШ и других кружков при МГУ.

Несколько задач приведены без решений. Указания к ним будут напечатаны в следующем номере журнала.

«Клетки» и «зайцы»

При решении задач «на доказательство» часто бывает полезен так называемый «принцип Дирихле» *). В самой простой и несерьезной форме он выглядит так: «нельзя посадить семерых зайцев в три клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не больше двух зайцев». Сейчас мы решим несколько задач, выбирая каждый раз подходящих «зайцев» и строя соответствующие «клетки».

1. В классе 30 человек. В диктанте Саша Иванов сделал 13 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали ошибок поровну (может быть, по 0 ошибок).

Здесь «зайцы» — ученики, «клетки» — число сделанных ошибок.

*) Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859)— известный немецкий математик.

Рис. 1.

В клетку 0 «посадим» всех, кто не сделал ни одной ошибки, в клетку 1 — тех, у кого одна ошибка, в клетку 2 — две, ... и так до клетки 13, куда попал один Саша Иванов.

Теперь применим принцип Дирихле (обратите внимание, это очень важное место).

Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, никакие три ученика не сделали по одинаковому числу ошибок, то есть в каждую из клеток 0, 1, ... , 12 попало меньше трех школьников. Тогда в каждой из них два человека или меньше, а всего в этих 13 клетках не больше 26 человек. Добавив Сашу Иванова, все равно не наберем 30 ребят. Противоречие.

Можно ли утверждать, что ровно трое сделали поровну ошибок? Нет, конечно. Возможно, все ребята, кроме Саши, написали диктант без единой ошибки, то есть все сделали по 0 ошибок. Можно ли считать, что по крайней мере четверо попали в одну «клетку»? Нет, нельзя. Класс, в котором по 3 человека сделали 0, 1, 2 ошибки, по 2 человека — 3, 4, ... , 12 ошибок и один — 13, удовлетворяет условию задачи.

2. Пусть в классе 41 человек, а не 30. Докажите, что найдутся четверо, сделавшие одинаковое число ошибок. (Остальные условия — как в задаче 1.)

3. В Москве около 7,1 миллиона жителей, на голове у каждого не больше 100 000 волос. Докажите, что в Москве есть по крайней мере 70 человек с одинаковым числом волос на голове.

Знакомства

Будем считать, что знакомство — «симметричное» отношение между людьми: если Комаров знаком с Жуковым, то и Жуков знаком с Комаровым.

4. Выберем любым способом 5 человек. Докажите, что по крайней мере двое из них имеют одинаковое число знакомых среди выбранных.

Рис. 2.

Построим 5 «клеток» 0, 1, 2, 3, 4. Пусть номер «клетки» равняется числу знакомых у «содержащихся» в ней людей. Возможны два случая: есть человек, ни с кем из остальных не знакомый, или же такого человека нет. В первом случае в «клетке» 4 никого нет (иначе сидящие в 4 и в 0 были бы знакомы между собой) и 5 человек размещены по 4 «клеткам». Во втором случае они тоже так рассажены (так как «клетка» 0 пуста). По принципу Дирихле по крайней мере двое находятся в одной клетке.

5. Докажите то же, что в предыдущей задаче, если выбрано не 5, а 100 человек, n человек.

6. В первенстве по футболу участвуют 10 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Делимость

7. Докажите, что из любых 12 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

При делении на 11 получается один из 11 остатков: 0, 1, 2, ... , 10. У нас же дано 12 чисел, и по принципу Дирихле остатки от деления на 11 у каких-то двух из них совпадают. Разность этих двух делится на 11.

8. В строку выписано 5 натуральных чисел:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5.$$

Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5.

Рассмотрим 5 чисел:

$$\begin{aligned}&a_1,\\&a_1+a_2,\\&a_1+a_2+a_3,\\&a_1+a_2+a_3+a_4,\\&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.\end{aligned}$$

Если одно из них делится на 5, то все в порядке. В противном случае при делении на 5 они дают в остатке какие-то из 4 чисел: 1, 2, 3, 4. По принципу Дирихле остатки по крайней мере двух из выписанных 5 чисел совпадают. Разность их делится на 5. Но разность эта — одно из чисел, данных в задаче, или сумма нескольких из них, стоящих рядом.

9. В строку выписано n чисел. Докажите, что либо одно из них делится на n, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на n.

10. Докажите, что из любых 52 натуральных чисел можно выбрать два числа так, что либо их сумма, либо их разность делится на 100. Верно ли это утверждение для 51 числа?

Геометрия

11. В квадрат со стороной 1 *м* бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $^1/_7$ *м*.

Разобьем квадрат на 25 равных квадратиков (со стороной $^1/_5$ *м*). Докажем, что в каком-то из них находятся по крайней мере три из данных точек. Применим принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было не больше двух точек, то всего их было бы не больше $2\times25=50$.

Опишем окружность вокруг квадратика, в котором лежат три (или больше) из данных точек. Подсчитайте сами ее радиус. Он меньше $^1/_7$ *м*.

12. В квадрате со стороной длины 1 взяты произвольно 101 точка (не обязательно внутри квадрата), причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $^1/_{100}$.

13. В куб со стороной 1 помещена 2001 муха. Доказать, что хотя бы трех из них можно поймать сферой радиуса $^1/_{11}$ *).

А теперь — несколько задач, для решения которых принцип Дирихле придется переделать на геометрический лад.

---

*) Эта задача предложена нашим читателем И. А. Кушниром.

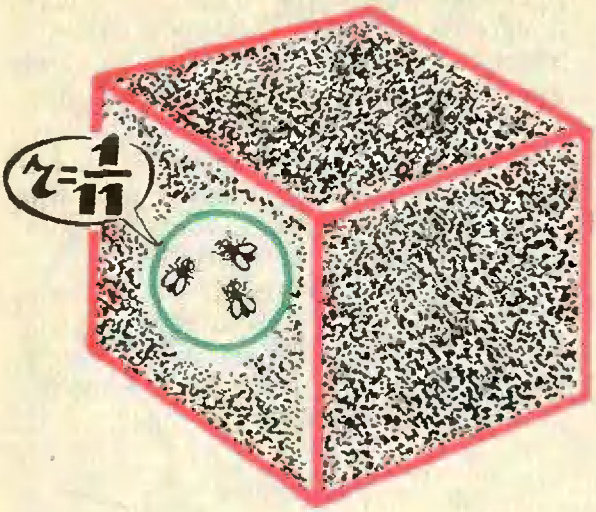


Рис. 3.

14. Несколько дуг окружности покрашены в черный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

Покрасим в синий цвет дуги, симметричные черным относительно центра окружности. Поскольку сумма длин синих дуг равна сумме длин черных, то общая длина окрашенных дуг меньше длины окружности. Значит (принцип Дирихле!), найдется неокрашенная точка. Диаметр, проходящий через нее, и будет искомым.

«Рассмотрим отрезок AB. Пусть на нем лежат несколько черных отрезков общей длиной $1{,}5AB$. Тогда какая-то точка AB принадлежит по крайней мере двум черным отрезкам». Такое рассуждение помогает в следующей задаче.

15. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 *см* расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 *см*. (Окружности могут пересекаться или совпадать.) Доказать, что найдется прямая, параллельная AB, имеющая общие точки по крайней мере с двумя окружностями.

Рано или поздно повторится

16. Дан ряд

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots,$$

в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди 100 000 001 первых членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

Рассмотрим ряд остатков от деления данных чисел на 10 000. Остаток, стоящий на n-м месте, обозначим символом a_n. $a_1=1$, $a_2=1$, $a_6=8$, $a_{10}=55$ и так далее. Различных остатков существует 10 000, различных пар остатков — $10\,000^2=100\,000\,000$. Рассмотрим пары a_1a_2; a_2a_3; a_3a_4;...; $a_{100\,000\,001}a_{100\,000\,002}$. По принципу Дирихле из этих 100 000 001 пары остатков по крайней мере две совпадают: $a_k=a_m$, $a_{k+1}=a_{m+1}$, где k и m меньше 100 000 002, k меньше m. По остатку суммы и одного из слагаемых однозначно определяется остаток второго слагаемого (проверьте), поэтому $a_{k-1}=a_{m-1}$, $a_{k-2}=a_{m-2}$ и так далее вплоть до $a_2=1=a_{m-k+2}$, $a_1==1=a_{m-k+1}$. Теперь ясно (почему?), что $a_{m-k}=0$.

17. Докажите, что для любого натурального n в ряду из условия

Рис. 4.

предыдущей задачи найдется число, оканчивающееся на n нулей.

18. Докажите, что существует степень числа 29, оканчивающаяся цифрами 00 001.

19. Пусть число A не делится на 2 и 5. Докажите, что для любого n существует степень числа A, при делении на 10^n дающая 1 в остатке.

20. Докажите, что существует кратное 1970 число, в десятичной записи которого участвуют только нули и единицы.

Таблица

В таблице $n \times n$ клеток расставлены целые числа от 1 до n^2. Нас будет интересовать следующее утверждение:

«При любой расстановке найдутся две клетки, имеющие общую сторону, такие, что разность между числами, стоящими в этих клетках, больше 5».

21. Докажите это утверждение

а) для $n=10$;

б) для всех n, больших 10;

в) для $n=9$.

22. Опровергните его для $n=5$.

Автору неизвестно, верно ли рассматриваемое утверждение для $n=$ $=6$, 7, 8.

Задачи

23. В доме 123 жильца, им вместе 3813 лет. Можно ли выбрать 100 из них, которым вместе не меньше 3100 лет?

24. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26°. Верно ли аналогичное утверждение, если 26° заменить на 25°?

25. Докажите, что у любого дерева можно оборвать $^8/_{15}$ его листьев, оставив при этом не менее $^7/_{15}$ тени, которую давало дерево (тенью от ствола и веток пренебречь; число листьев можно считать делящимся на 15).

26. Двадцати одному мальчику дали 200 орехов. Докажите, что, как бы они их ни разделили, найдутся два мальчика, которым досталось поровну орехов (может быть, по 0 орехов).

27. Даны 7 отрезков. Длина каждого больше 10 *см* и меньше 1 *м*. Докажите, что из каких-то трех можно составить треугольник.

28. Из ряда 1, 2, ... , 200 каким-то способом выбрано 101 число. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

(Окончание. Начало см. на стр. 16.)

для юных астрономов, приезжающих из разных мест СССР. Многие члены юношеской секции были активными участниками наблюдения солнечного затмения 1968 года.

В последние годы заметно расширилась сеть молодежных астрономических обществ и различных клубов и кружков, объединяющих около 3000 школьников. Помощь этим организациям осуществляется из пяти региональных методических центров, находящихся в отделах астрономии Московского и Бакинского дворцов пионеров, в обсерватории Алма-Атинского дворца пионеров, Крымской областной юношеской обсерватории (Симферополь) и детской обсерватории клуба юных техников Сибирского отделения АН СССР, которые направляют работу юных астрономов на развитие наблюдений с использованием современных методов и технических средств, на конструирование и изготовление различных астрономических приборов и организацию народных обсерваторий и астрономических лабораторий.

Большое внимание к работе юных астрономов со стороны Министерств просвещения СССР и РСФСР, ЦК ВЛКСМ, Центральной станции юных техников, ВДНХ и Правления Всесоюзного общества «Знание» дало возможность шире развивать работу юношеских секций ВАГО. Все это позволило провести в 1969 году в Баку Первую Всесоюзную конференцию юных любителей астрономии, которая способствовала обмену и распространению лучшего опыта работы юношеских секций ВАГО.

Вице-президент ВАГО
профессор Л. С. Хренов

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М91. Двое играют в «крестики» и «нолики» на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим своим ходом он должен ставить крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседней с данной клеткой считается любая, имеющая с ней общую сторону или общую вершину. Второй играющий каждым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом друг с другом). Докажите, что, как бы ни играл первый, второй может его «запереть»: добиться того, чтобы первому больше некуда было поставить крестик.

Исследуйте аналогичные игры, в которых второму разрешается за один ход ставить не три, а только два или только один нолик. Каков здесь будет результат при правильной игре партнеров: удастся ли ноликам «запереть» крестики (и какое наибольшее число ходов могут «продержаться» крестики) или игра может продолжаться до бесконечности?

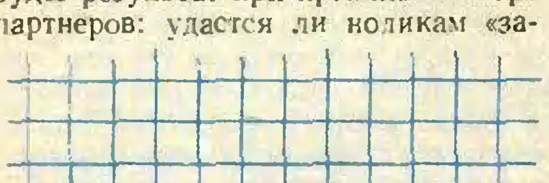


Рис. 1. Здесь изображена одна из позиций, которые могут возникнуть после третьего хода (черным цветом выделены крестик и нолики, поставленные на первом ходу, красным — на втором, голубым — на третьем).

Попробуйте изучить другие варианты этой игры: когда соседними с данной считаются только клетки, имеющие с ней общую сторону; когда плоскость разбита не на квадраты, а на правильные шестиугольники; когда первому разрешается ставить сразу p крестиков, а второму — q ноликов.

А. П. Савин

М92. Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом строго придерживаться такого распорядка: каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — ездить в магазин за продуктами и каждый пятый день решать задачи по математике. (В первый день Петя проделывал и то, и другое, и третье и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ездить в магазин и решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?

М93. Каждое из чисел $x_1, \ldots, x_n$ равно плюс или минус единице. Известно, что

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0.$$

Докажите, что n делится на четыре.

А. М. Леонтович

М94. Докажите, что не существует многогранника, у которого к каждой вершине и к каждой грани примыкает не менее чем по четыре ребра.

Л. Г. Лиманов

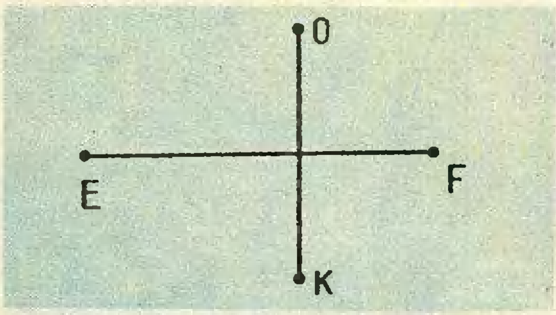


Рис. 2

М95. На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия EF и опущен перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам EF и OK (рис. 2)?

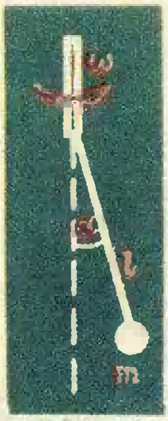


Рис. 3.

Ф103. Из пушки делают две серии выстрелов, наклонив ствол под углами 30° и 40° к горизонту. В каком случае попадания снарядов будут более кучными, если разброс вызван неточным прицеливанием, а не разбросом начальных скоростей снарядов? Сопротивление воздуха считать пренебрежимо малым.

Г. Л. Коткин

Ф104. В закрытом сосуде имеется несколько капель жидкости разной величины. Что произойдет с ними через продолжительное время?

Ф105. Груз массы m прикреплен к стержню длины l. Другой конец стержня шарнирно прикреплен к вертикальной оси (рис. 3). Нарисуйте примерный график зависимости угла α, образуемого стержнем с вертикалью, от угловой скорости ω вращения оси.

И. Ш. Слободецкий

Ф106. Два электрона находятся на расстоянии l друг от друга, причем в этот момент скорость одного из них равна нулю, а скорость другого равна v и направлена под углом 45° к линии, соединяющей электроны.

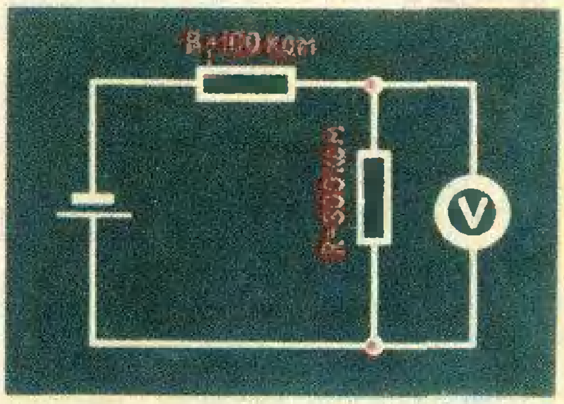
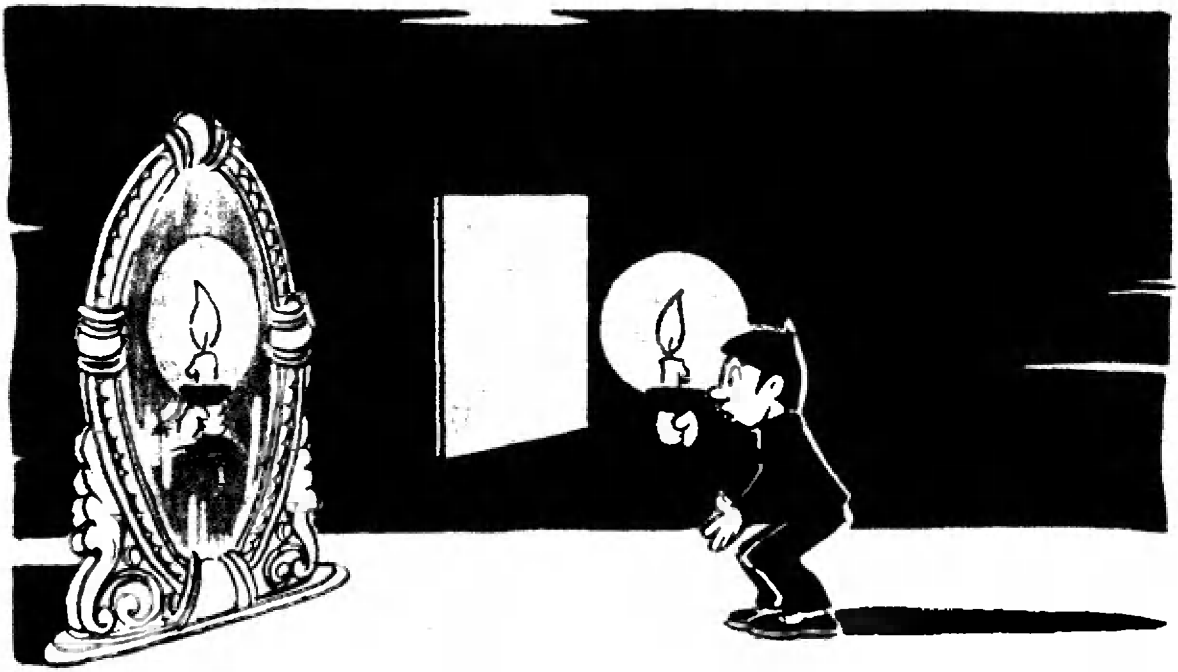


Рис. 4.

Каким будет угол между скоростями электронов, когда они вновь окажутся на расстоянии l друг от друга?

В. П. Казанцев

Ф107. В схеме, изображенной на рисунке 4, вольтметр измеряет падение напряжения на сопротивлении $R = 300$ *ком*. Каким должно быть сопротивление вольтметра для того, чтобы его показания отличались не более чем на 2% от действительного значения U_R?



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М39—М49.

М39

Докажите, что целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2-mxy+y^2=1$ (где m — данное целое число, большее единицы) тогда и только тогда, когда x и y — соседние члены последовательности $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$, $\varphi_2=m$, $\varphi_3=m^2-1$, $\varphi_4=m^3-2m$, $\varphi_5=m^4-3m^2+1$, ..., в которой $\varphi_{k+1}=m\varphi_k-\varphi_{k-1}$ для всех $k\geq 1$.

Например, все решения уравнения

$$x^2-3xy+y^2=1 \tag{1}$$

в целых числах (x, y), $0\leq x<y$, — это пары

$$(0, 1),\ (1, 3),\ (3, 8),\ (8, 21),\ldots \tag{2}$$

соседних членов последовательности 0, 1, 3, 8, 21, ... , определяемой условиями $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$, $\varphi_{k+1}=3\varphi_k-\varphi_{k-1}$ для всех $k\geq 1$.

Решим эту задачу для $m=3$ (для других $m>1$ решение совершенно аналогично.) Мы должны доказать, что, во-первых, все пары чисел (2) удовлетворяют уравнению (1) и, во-вторых, никакие другие пары неотрицательных целых чисел этому уравнению не удовлетворяют. (Заметим, что эту вторую и более трудную часть решения многие читатели, приславшие письма, упустили из виду.)

В последовательности (2) за каждой парой (x, y) следует пара (x_1, y_1), которую можно получить из (x, y) с помощью такого преобразования:

$$x_1=y,\ y_1=3y-x. \tag{3}$$

Это преобразование $(x, y)\to(y, 3y-x)$ мы обозначим буквой T. Нетрудно проверить, что если пара (x, y) удовлетворяет уравнению (1), то пара $(x_1, y_1) = T(x, y)$ ему тоже удовлетворяет:

$$x_1^2-3x_1y_1+y_1^2=y^2-3y(3y-x)+(3y-x)^2=y^2-3xy+x^2. \quad (4)$$

Отсюда сразу видно, что все пары (2) удовлетворяют уравнению (1): ведь пара $(0, 1)$ ему удовлетворяет, а все остальные получаются из нее с помощью конечного числа преобразований T.

Докажем теперь, что других решений (x, y) в целых числах, подчиненных условиям $0\leqslant x<y$, у уравнения (1) нет. Пусть (x_1, y_1) — одно из таких решений. Найдем такую пару (x, y), из которой эти x_1 и y_1 получаются по формулам (3),— для этого достаточно выразить x и y через x_1 и y_1:

$$x=3x_1-y_1,\ y=x_1. \quad (5)$$

Такой переход от (x_1, y_1) к (x, y) — преобразование, *обратное* *) к T — мы будем обозначать через T^{-1}. Из равенств (4) следует, что если пара (x_1, y_1) удовлетворяет уравнению (1), то пара $(x, y) = T(x_1, y_1)$ ему также удовлетворяет. Покажем, что если, кроме того, $0<x_1<y_1$, то

$$0\leqslant x<y. \quad (6)$$

Представим равенство $x_1^2-3x_1y_1+y_1^2=1$ следующими двумя способами:

$$x_1^2+y_1(y_1-3x_1)=1, \quad (7)$$

$$x_1(x_1-y_1)+y_1(y_1-2x_1)=1. \quad (8)$$

Из равенства (7) сразу следует (x_1 и y_1 положительны!), что $-x=y_1-$ $-3x_1\leqslant 0$, причем если $y_1-3x_1=0$, то $x_1=1$ и $y_1=3$. Из равенства (8) в свою очередь следует, что $y-x=y_1-2x_1>0$ (ведь x_1-y_1 отрицательно). Неравенства (6) доказаны. Заметим, что их можно переписать и так:

$$0\leqslant x<x_1, \quad (9)$$

поскольку $x_1=y$. Итак, любое решение (x_1, y_1), $0<x_1<y_1$, после преобразования T^{-1} переходит в решение (x, y), для которого $0\leqslant x<y$. Если при этом $x>0$, то мы можем применить T^{-1} еще один или несколько раз, получая новые (меньшие по величине) решения. Действительно, как показывает (9), величина целого числа x при каждом преобразовании уменьшается. Поэтому через некоторое конечное число шагов мы должны будем остановиться, а остановиться мы можем лишь тогда, когда получим решение (x, y), у которого $x=0$ и, следовательно, $y=1$. Таким образом, мы доказали, что из каждого решения (x_1, y_1) за конечное число преобразований T^{-1} получается решение $(0, 1)$. Отсюда следует, что каждое решение получится из $(0, 1)$ за конечное число преобразований T (то есть что никаких других, отличных от (2), решений нет). Задача полностью решена.

Более наглядно это решение можно представить так. Будем изображать пару чисел (x, y), как обычно, точкой плоскости. Тогда уравнение $x^2-3xy+y^2=1$ задает на плоскости кривую, называемую *гиперболой*. (На обложке нарисовано целое семейство гипербол, задаваемых уравнениями $x^2-3xy+y^2=c$ с разными значениями параметра c, а интересующая нас — желтого цвета.) Решить это уравнение в целых числах — значит указать все точки с целочисленными координатами, лежащие на гиперболе. Одну такую точку указать легко: это — черная точка с координатами $(0, 1)$. Все остальные (в пределах угла $0\leqslant x<y$), как мы доказали, получаются из нее последовательным применением преобразования $T:(x, y)\to$ $\to(y, 3y-x)$. Это преобразование T плоскости обладает такими свойствами:

1) Переводит каждую прямую на плоскости снова в прямую (такие преобразования называются *линейными*).

---

*) Понятие обратного преобразования обсуждалось в статье А. Н. Колмогорова «Что такое функция?» («Квант» № 1,1970).

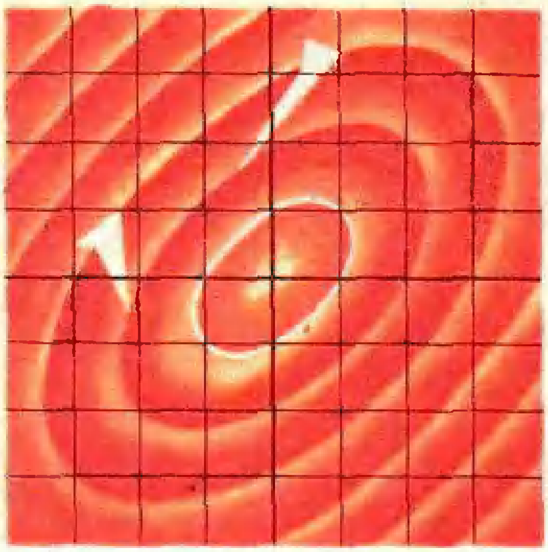


Рис. 1.

2) Переводит любую целочисленную точку снова в целочисленную.

3) Переводит в себя каждую гиперболу $x^2-3xy+y^2=c\neq 0$ (и каждый из четырех лучей с вершиной 0, 0), на которые распадается множество $x^2-3xy+y^2=0$; каждая точка под действием T «переезжает» по своей гиперболе (или лучу) в свое новое положение; точка (0, 0) остается на месте. Такое преобразование называется *гиперболическим поворотом* с центром (0, 0) по аналогии с обычным «круговым» поворотом.

Теми же свойствами обладает и обратное преобразование T^{-1}. Упомянем еще одно интересное свойство этих преобразований:

4) Площадь любой фигуры при преобразовании не меняется. (Белые четырехугольники, расположенные в верхней полуплоскости, переходят друг в друга при преобразованиях T и T^{-1}.)

Совершенно аналогично обстоит дело и при $m>3$. При $m=2$ все наши рассуждения также проходят без изменения, но геометрическая интерпретация несколько меняется. Вместо свойства 3) соответствующее преобразование $T:(x, y)\rightarrow(y, 2y-x)$ обладает таким (3′): оно переводит каждую прямую $y-x=c$ в себя; каждая точка «сдвигается» по своей прямой (при $c\neq 0$), а все точки, лежащие на прямой $y-x=0$, просто остаются неподвижными. (Такое преобразование называется *сдвигом*.) Проверьте это и начертите соответствующую картинку сами.

Любопытно, что и для случая $m=1$, то есть для уравнения $x^2-xy+y^2=1$ (оно определяет на плоскости *эллипс* *)), можно выписать аналогичное преобразование T: $(x, y)\rightarrow(y, y-x)$, которое переводит это уравнение и вообще каждый эллипс $x^2-xy+y^2=c$ в себя. Это преобразование называется *эллиптическим поворотом*. Оно так же, как и при $m>1$, переводит все целочисленные решения уравнения друг в друга, но в данном случае решений конечное количество (это не удивительно: ведь эллипс, в отличие от гипербол и прямых,— фигура ограниченная), а именно шесть, и вместо схемы

$$(0, 1)\xrightarrow{T}(1, 3)\xrightarrow{T}(3, 8)\xrightarrow{T}(8, 21)\rightarrow\ldots,$$

которую можно было бы нарисовать для уравнения (1), теперь получается такая:

$$\begin{tikzcd}
(-1,0) \arrow[r, "T"] & (0,1) \arrow[r, "T"] & (1,1) \arrow[d, "T"] \\
(-1,-1) \arrow[u, "T"] & (0,-1) \arrow[l, "T"] & (1,0) \arrow[l, "T"]
\end{tikzcd}$$

Л. Г. Лиманов

M40

Найдите сумму

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1.$$

Попробуйте решить следующую, более общую задачу: найти сумму

$$S_{n,k}=[1\cdot 2\ldots k]\cdot[n(n+1)\ldots(n-k+1)]+[2\cdot 3\ldots(k+1)]\cdot[(n-1)(n-2)\ldots(n-k)]+$$
$$+[3\cdot 4\ldots(k+2)]\cdot[(n-2)(n-1)\ldots(n-k-1)]+\ldots+[(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)]\times$$
$$\times[(k+1)k\ldots 2]+[(n-k+1)(n-k+2)\ldots n]\cdot[k(k-1)\ldots 1].$$

Задача состояла из двух заданий, причем первое было намного легче второго, допускало несколько различных решений. Приведем одно из них, достаточно интересное и поучительное, следуя рассуждениям *И. Алексеева* из г. Новомосковска Тульской обл. и *А. Аляева* из Пачелмы Пензенской обл.

*) См. статью И. М. Бронштейна «Эллипс» («Квант» № 9, 1970).

Прежде проверим, что

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ .\ .\ .\ +n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad (1)$$

Действительно, $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$,

$$2\cdot 3=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3},$$

$$3\cdot 4=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3}-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3},$$

$$n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}.$$

Отсюда и следует справедливость равенства (1).

Распишем теперь заданную сумму в виде треугольной таблицы

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5 6 7
. . . .
1 2 3 4 5 6 7 ... $n-1$
1 2 3 4 5 6 7 ... $n-1$ n

Находить значение этой суммы можно не только отысканием суммы столбцов и дальнейшим их сложением. Можно, напротив, отыскивать суммы по строкам таблицы. Поскольку

$$1+2+3+\ .\ .\ .\ +k=\frac{k(k+1)}{2},$$

мы придем к сумме, записанной в левой части равенства (1). Поэтому получим

$$n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\ .\ .\ .\ +1\cdot n=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Более общую сумму, приведенную в условии задачи, можно отыскать с помощью комбинаторных соображений.

Напомним формулу для C_n^k — числа сочетаний из n элементов по k *):

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-k+1)}{1\cdot 2\ .\ .\ .\ k}=\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+1)}{k!}.$$

Очевидно равенство

$$[1\cdot 2\ldots k]\cdot[n(n-1)\ldots(n-k+1)]+[2\cdot 3\ldots(k+1)]\cdot[(n-1)(n-2)\ldots$$
$$\ldots(n-k)]+\ldots+[(n-k+1)(n-k+2)\ldots n]\cdot[k(k-1)\ldots 1]=$$
$$=(k!)^2(C_k^k\cdot C_n^k+C_{k+1}^k\cdot C_{n-1}^k+C_{k+2}^kC_{n-2}^k+\ldots+C_n^k\,C_k^k).$$

Каждое слагаемое вида $C_{k+m}^kC_{n-m}^k$ (где $m=0, 1, 2,\ldots, n-k$), представляет число сочетаний (или выборок) по $2k$ элементов из $n+k$, но не всех возможных, а таких, образуя которые сперва выбирают k элементов из чис-

*) См. статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» в «Кванте» № 1 1971.

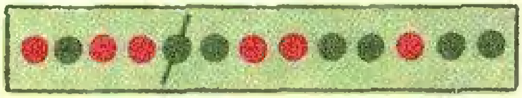


Рис. 2. Среди $m+k+1$ элементов выбираем сначала один (такой, что слева от него и справа от него находится не менее чем по k элементов), проводим по нему черту, а затем слева от черты и справа от черты выбираем по k элементов. На нашем рисунке $m=9$, $k=3$, $m+k+1=13$.

ла определенных $k+m$ элементов, а затем еще k элементов из оставшихся $n-m$. Сказанное можно наглядно пояснить так. Разместим «в строчку» данные $n+k$ элементов и проведем вертикальную черту, отделяющую $k+m$ элементов слева от $n-m$ элементов справа. Выберем каким-то образом k элементов слева от черты и k элементов справа от черты, а затем образуем соединение каждой из таких «левых» выборок с каждой из таких «правых» выборок. Всего таких соединений будет, очевидно, $C^k_{k+m}\cdot C^k_{n-m}$.

Теперь нетрудно доказать, что

$$C^k_k\cdot C^k_n+C^k_{k+1}\cdot C^k_{n-1}+C^k_{k+2}\cdot C^k_{n-2}+\ldots+C^k_n\cdot C^k_k=C^{2k+1}_{n+k+1}. \quad (2)$$

Для этого достаточно установить взаимно однозначное соответствие между выборками из $n+k+1$ элементов по $2k+1$ и выборками из $n+k$ элементов такого вида: «k элементов слева от черты; черта; k элементов справа от черты», общее количество которых равно сумме, стоящей в левой части равенства (2). Итак, искомая сумма равна

$$(k!)^2\cdot C^{2k+1}_{n+k+1}=\frac{(n+k+1)!\,(k!)^2}{(2k+1)!(n-k)!}.$$

В частности, для первого задания **М40** имеем $k=1$ и поэтому сумма составит $C^3_{n+2}=\dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

Если приведенный путь рассуждений покажется вам трудным и тем более если он покажется вам интересным, рекомендуем заглянуть в книгу Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» (М., «Наука», 1969). Там, в частности, на стр. 57 доказана формула (24), аналогичная формуле (2).

В. Н. Березин

М41

Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Построить на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна к прямой XA.

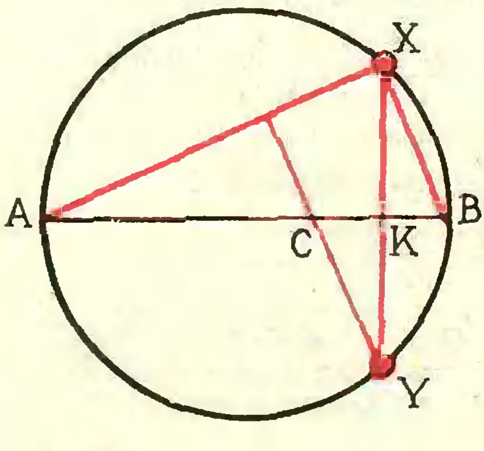


Рис. 3.

Пусть K — точка пересечения отрезков XY и AB; по условию $XY\perp AB$ и $XK=KY$. Для любой точки X на окружности $\angle AXB=90°$. Поэтому требование $YC\perp AX$ эквивалентно каждому из следующих условий:

$$YC\parallel BX,\ \angle YCB=\angle CBX,$$
$$\triangle CYK=\triangle KBX,\quad CK=KB.$$

Таким образом, восставив в середине отрезка CB перпендикуляр к прямой AB, мы получим в пересечении его с окружностью две искомые точки (любую из них можно принять за X, тогда другая будет играть роль Y).

М42

Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Доказать, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной

Докажем индукцией по n, что это утверждение справедливо для любого $(4n+1)$-значного числа. При $n=0$ оно очевидно. Предположим, что для некоторого n оно неверно, то есть существует такое число $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{4n-1}a_{4n}a_{4n+1}}$, что в сумме

$$+\begin{array}{cccccc} \overline{a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_{4n-1} & a_{4n} & a_{4n+1}} \\ \overline{a_{4n+1} & a_{4n} & a_{4n-1} & \cdots a_3 & a_2 & a_1} \\ & \leftarrow & & & \leftarrow & \end{array}$$

все цифры нечетны. Тогда сумма цифр a_1+a_{4n+1} нечетна и в местах, обозначенных стрелочками, не происходит переноса единицы в следующий разряд. Поэтому в сумме $(4n-3)$-значных чисел

$$+\begin{array}{c} \overline{a_3 \ldots a_{4n-1}} \\ \overline{a_{4n-1} \ldots a_3} \end{array}$$

также все цифры нечетны, следовательно, наше утверждение неверно и для $(n-1)$. Доказательство закончено (подумайте, почему обычный «шаг индукции» — «если верно для n, то верно и для $(n+1)$» — можно заменить шагом в обратную сторону: «если неверно для n, то неверно и для $(n-1)$»!).

Заметим, что доказанное утверждение нельзя усилить: для чисел, у которых число цифр четно или имеет вид $(4n+3)$, утверждение задачи может не выполняться:

11 112 222+22 221 111 = 33 333 333, 72 727 262 626+ 62 626 272 727=135 353 535 353.

М43

Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на n^2 маленьких треугольничков. Назовем «цепочкой» последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное число треугольничков в цепочке?

Ответ: n^2-n+1. Для доказательства, что часто бывает на олимпиадах, достаточно сделать один неожиданный шаг: раскрасить треугольнички в шахматном порядке, как это сделано на рисунке. Остальное совсем просто. Во всем треугольнике красных треугольничков на n больше, чем желтых (в каждом горизонтальном ряду красных на один больше), а в цепочке цвета должны чередоваться, поэтому красных может быть только на один больше, чем желтых.

Одна из цепочек максимально возможной длины показана на рисунке. (Из сказанного выше ясно, что для того, чтобы цепочка имела длину n^2-n+1, необходимо и достаточно, чтобы она начиналась и кончалась в красных треугольничках и проходила через все без исключения желтые.)

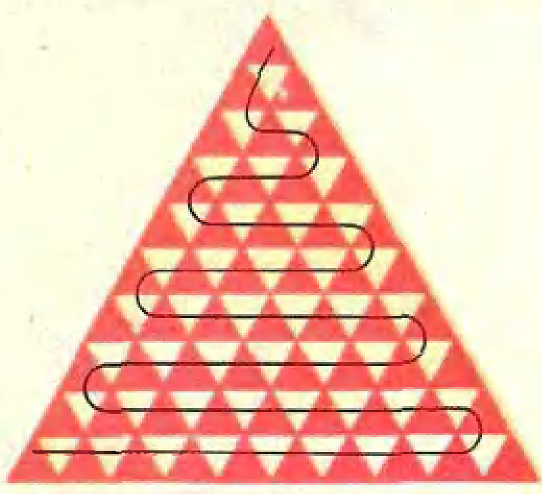


Рис. 4.

M44

Доказать, что для каждого натурального числа K существует бесконечно много натуральных чисел T, не содержащих в десятичной записи нулей и таких, что T и KT имеют одинаковые суммы цифр.

Пусть в числе K (в десятичной записи) k цифр. Тогда в роли T можно взять любое число 999...99, записываемое n девятками, где $n \geq k$; тогда и сумма цифр T, и сумма цифр KT равны $9n$ (в числе $KT = K(10^n-1)$ цифры, отстоящие друг от друга на n разрядов, дают в сумме 9; например,

$$743\,552 \cdot 99\,999\,999 = 743\,552 \cdot (10^8-1) =$$
$$= 74\,355\,200\,000\,000 - 743\,552 = 74\,355\,199\,256\,448;$$

почти очевидное доказательство для общего случая оставляем читателю).

M45

Доказать, что из любых 200 целых чисел можно выбрать 100, сумма которых делится на 100.

Попробуйте обобщить эту задачу: докажите, что из любых $2n-1$ целых чисел можно выбрать n, сумма которых делится на n, где $n \geq 2$.

Лемма. *Если утверждение задачи верно для $n = a$ и для $n = b$, то оно верно и для $n = ab$.*

Заметим, что свойство «сумма n целых чисел $x_1, \ldots, x_n$ делится на n» можно формулировать и так: «среднее арифметическое $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ — целое число».

Итак, пусть даны произвольные $2ab-1$ целых чисел. Поскольку утверждение верно при $n = b$ и $2ab-1 > 2b-1$, из данных $2ab-1$ чисел можно выбрать b, сумма которых делится на b. Затем из оставшихся (если их не меньше $2b-1$) выберем еще b чисел, обладающих этим свойством, и так далее.

Поскольку

$$2ab-1 = (2a-1)\,b + (b-1),$$

то эту операцию можно повторить $2a-1$ раз и получить $2a-1$ наборов по b чисел, в каждом из которых среднее арифметическое b чисел — целое. Поскольку утверждение верно для $n = a$, из этих $2a-1$ средних арифметических можно выбрать a, сумма которых делится на a. Ясно, что тогда ab чисел, составляющих соответствующие a наборов по b чисел, обладают нужным свойством: их сумма делится на ab. Лемма доказана (эту лемму, так же как и задачу, придумал *Ю. И. Ионин*).

Итак, для того чтобы доказать утверждение задачи для произведения $n = a_1 a_2 \ldots a_k$, достаточно доказать его для отдельных сомножителей $n = a_1$, $n = a_2$, ..., $n = a_k$ (и несколько раз применить лемму). Поэтому достаточно научиться доказывать это утверждение для простых сомножителей числа n. Например, чтобы решить задачу для $n = 100$, достаточно доказать два утверждения: «из любых 3 целых чисел можно выбрать 2, сумма которых делится на 2» и «из любых 9 целых чисел можно выбрать 5, сумма которых делится на 5». Первое очевидно, а второе можно доказать не очень длинным перебором. Предоставляем читателю возможность убедиться в этом, а также попробовать придумать доказательство, которое годилось бы сразу для любого простого n. Одно такое доказательство мы изложим в следующем номере журнала.

M46

Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных наибольшей диагонали?

Ответ: две, одна или ни одной.

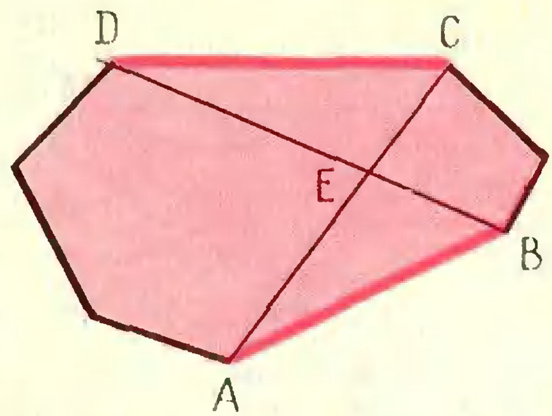


Рис. 5. Случай $AB=CD \geqslant \max\{AC, BD\}$ невозможен, поскольку $AB+CD<AE+EB+CE+ED=AC+BD$.

Примеры для каждого из этих случаев построить нетрудно. Многоугольника, у которого три или больше сторон равны наибольшей диагонали, не существует, поскольку две стороны, равные наибольшей диагонали, обязательно должны иметь общую вершину (рис. 5), а три стороны, каждые две из которых имеют общую вершину, могут быть только у треугольника, а у него нет диагоналей.

M47

Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Доказать, что $\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}$.

Выпишем числа одно под другим. В каждом разряде («столбце») 5 цифр. Из них можно составить 10 (неупорядоченных) пар. По всем n столбцам таких пар будет $10n$. Выясним, сколько среди них таких, которые состоят из одинаковых цифр, то есть пар (1, 1) и (2, 2). В каждом столбце таких пар либо 4, либо 6. Поэтому общее количество таких пар не меньше $4n$ и не больше $6n$. С другой стороны, количество таких пар равно $10m$, поскольку при сравнении двух любых чисел по всем n разрядам, по условию, получается ровно m таких пар, а всевозможных пар из 5 чисел — 10.

Итак, $4n \leqslant 10m \leqslant 6n$, что и требовалось доказать (см. рис. 6).

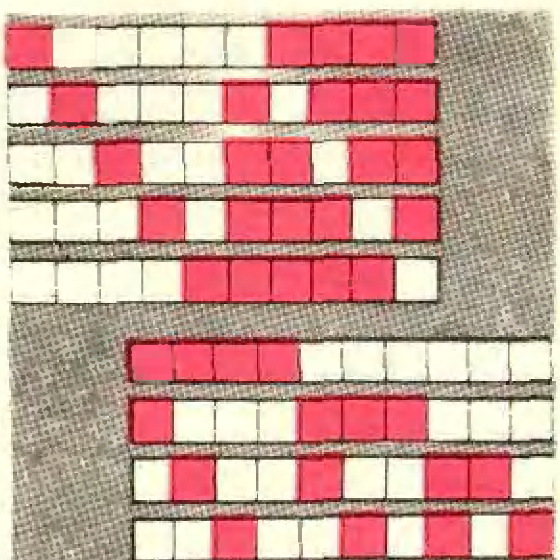


Рис. 6. Здесь представлены примеры случаев, когда в неравенствах, указанных в условии задачи, достигается равенство. Одна из цветов (например, белый) соответствует цифре 1, другой (красный) — цифре 2.

M48

В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Доказать, что угол BAC больше 45°.

Нетрудно доказать, что для данного $\angle BAC = \alpha < \frac{\pi}{2}$ существует ровно один (с точностью до подобия) треугольник ABC, в котором высота CH, биссектриса AD и ме-

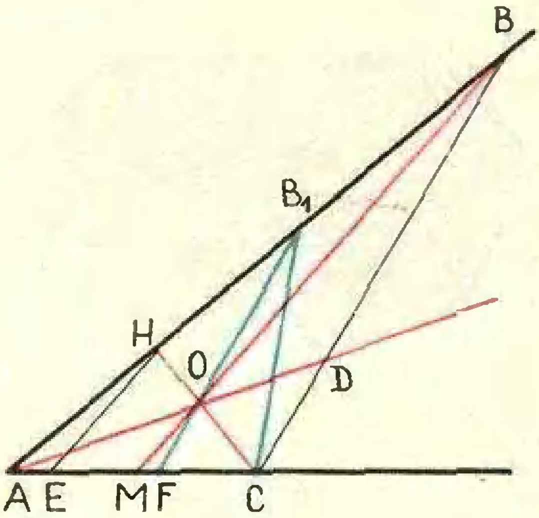


Рис. 7.

диана BM пересекаются в одной точке. Действительно, отложив на одной стороне угла $\angle A = \alpha$ (произвольный) отрезок AC, опустив на другую сторону угла перпендикуляр CH и обозначив его точку пересечения с биссектрисой угла A через O, мы найдем точку B пересечения второй стороны угла и прямой OM (где M — середина отрезка AC) и тем самым построим нужный треугольник ABC, — очевидно, что при заданных $\angle A$ и AC он определяется единственным образом. Заметим, что при этом угол B острый (поскольку точка H — основание высоты — лежит на стороне AB).

Докажем, что если $\angle A < \frac{\pi}{4}$, то $\angle ACB > \frac{\pi}{2}$. Отложим на прямой AB отрезок $HB_1 = AH$. Тогда биссектриса B_1F угла B_1 равнобедренного треугольника AB_1C пройдет через точку O. Поскольку $\frac{AF}{FC} = \frac{AB_1}{B_1C} > 1$, то точка M лежит между A и F, поэтому B_1 лежит между A и B и $\angle BCA > \angle B_1CA > \frac{\pi}{2}$.

В этой задаче можно получить и более точный результат: найти точную оценку снизу для угла α при условии, что $\angle ACB = \gamma < \frac{\pi}{2}$. Для этого выразим γ как функцию от α. Проведем $HE \parallel BM$ (E — точка на AC). Тогда (рис. 7)

$$\frac{EM}{MC} = \frac{HO}{OC} = \frac{AH}{AC} = \cos\alpha, \quad \frac{HB}{AH} = \frac{EM}{AE} = \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \frac{HB}{HC} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)},$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \operatorname{arctg}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}.$$

Отсюда ясно, что функция $\gamma = \gamma(\alpha)$ на отрезке $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ монотонно убывает (чем больше α, тем больше $\sin\alpha$ и тем меньше $\cos\alpha$, а поэтому меньше и вся дробь, стоящая под знаком арктангенса). Найдем теперь α, для которого $\gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2}$. Это уравнение сводится к такому: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin^2\alpha\,(1-\cos\alpha) = \cos^3\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Итак, если $\gamma < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha > \alpha_0 = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(\alpha_0 > \frac{\pi}{4}\right.$, поскольку $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; как можно убедиться по таблицам, величина угла, соотвествующего α_0, в градусах составляет примерно $51°50'$).

M49

На карточках написаны числа от 11 111 до 99 999 включительно. Затем эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Доказать, что полученное 444 445-значное число не может быть степенью двойки.

Легко доказать, что это число делится на 11 111, пользуясь тем, что числа 10^5A и A при любом целом A дают одинаковые остатки при делении на 11 111, а сумма $11\,111+11\,112+\ldots+99\,998+99\,999$ делится на 11 111. Но если число делится на 11 111, то оно, конечно, не может быть степенью двойки. (Это сразу следует, например, из теоремы о единственности разложения на простые множители.)

Наиболее удачные решения задач нам прислали *Э. Туркевич* из г. Черновцы (он нашел точную оценку угла α в задаче **М48**, решил задачи **М46** и **М49**) и *Р. Ахметшин* из г. Ош (**М42**, **М44**, **М47**).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф45, Ф59—Ф65

Вернемся еще раз к задаче Ф45. У нее есть довольно простое и красивое решение.

Ф45

Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком и заряженный до некоторой разности потенциалов, разряжается через свой диэлектрик. Каким будет магнитное поле токов разряда в пространстве между сферами?

Так как в любой точке диэлектрика все направления в плоскости, перпендикулярной к радиусу, равноправны, то вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля не может иметь составляющей, лежащей в этой плоскости. Поэтому вектор $\vec{B}$ может быть направлен только вдоль радиуса. Но все точки изолятора равноправны. Это означает, что векторы $\vec{B}$ и силовые линии магнитного поля или сходятся, или выходят из центра сферы. Но ведь силовые линии магнитного поля должны быть замкнутыми. Значит, это невозможно, и $\vec{B}=0$. Магнитное поле токов разряда конденсатора равно нулю.

Ф59

Какое из ребер проволочного куба следует удалить, чтобы сопротивление между точками A и B (рис. 8) изменилось как можно сильнее? Сопротивления всех ребер куба одинаковы.

Пронумеруем все ребра куба и его вершины. Ток, идущий по ребру *1*, разветвляется в вершине *1* на два потока, идущие затем по ребрам *7* и *8*. Аналогично, ток, идущий по ребру *2*, разветвляется на два равных потока в вершине *2* и так далее. Через ребро *4* идет ток, шедший по ребрам *7* и *12*... Ребру *4* эквивалентны ребра *5* и *6*. Это означает, что через ребра *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6* идет ток вдвое больший, чем через ребра *7*, *8*, *9*, *10*, *11* и *12*. Ясно, что сопротивление схемы изменится больше всего, если из схемы удалить проводник, по которому идет наибольший ток. Из проволочного куба нужно удалить одно из ребер *1*, *2*, *3*, *4*, *5* или *6*.

Убедитесь в этом, подсчитав сопротивления соответствующих цепей.

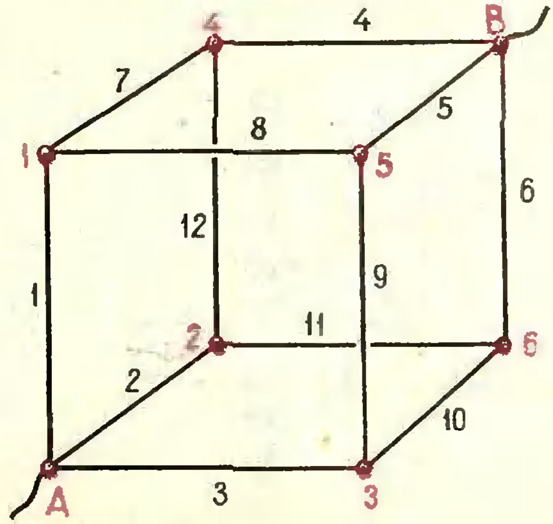


Рис. 8.

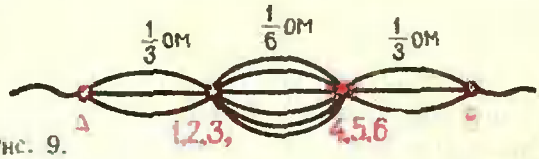


Рис. 9.

Несколько советов. Сопротивление куба между вершинами A и B подсчитать нетрудно. Для этого нужно лишь заметить, что в силу симметрии вершины *1*, *2* и *3* имеют одинаковый потенциал. Поэтому сопротивление цепи не изменится, если их соединить вместе. Конечно, и вершины *4*, *5* и *6* имеют тоже одинаковый потенциал и их тоже можно соединить. После этого вы получите цепочку (рис. 9), сопротивление которой подсчитать совсем легко. Если принять сопротивление одного ребра равным 1 *ом*, то сопротивление цепочки будет равно $^5/_6$ *ом*. Нетрудно найти сопротивление цепи в том случае, когда удалено одно из ребер *1*, *2*, *3*, *4*, *5* или *6*. Здесь тоже можно найти эквипотенциальные точки, соединив которые вы получите схему из последовательно и параллельно соединенных сопротивлений. Но прежде чем находить сопротивление цепи после удаления одного из ребер *7*, *8*, *9*, *10*, *11* или *12*, внимательно прочитайте статью А. Р. Зильбермана «Преобразование электрических цепей» в «Кванте» № 3 за 1971 год. Вам понадобится метод, о котором рассказывается в этой статье.

Ф60

В плоском зеркале видно изображение свечи. Что произойдет с ним, если между зеркалом и свечой поставить плоскопараллельную стеклянную пластинку?

Нарисовав ход нескольких лучей, нетрудно убедиться в том, что после того, как между свечой и зеркалом поставили плоскопараллельную стеклянную пластинку, изображение свечи приблизится к зеркалу (рис. 10). Синие линии показывают ход лучей без пластинки, красные — с пластинкой.

Ф61

Кубик, скользящий без трения по гладкому горизонтальному полу, ударяется одной из своих боковых граней в вертикальную стенку. Коэффициент трения кубика о стенку равен k. Под каким углом к стенке отскочит кубик, если до столкновения с ней он двигался по направлению, составляющему со стенкой угол α?

На кубик при ударе о стенку действуют две силы: сила N нормальной реакции стенки и сила трения $F_{тр}$ (рис. 11). Разложим скорости кубика до и после столкновения со стенкой на составляющие, параллельные этим силам. Скорости $v_1 = v\sin\alpha$ и u_1 перпендикулярны к стенке, а скорости $v_2 = v\cos\alpha$ и u_2 параллельны ей. В направлении, перпендикулярном к стенке, между кубиком и стенкой, как обычно, происходит абсолютно упругий удар, в результате которого составляющая скорости кубика, перпендикулярная к стенке, меняется на противоположную: $u_1 = -v_1 = -v\sin\alpha$. Это означа-

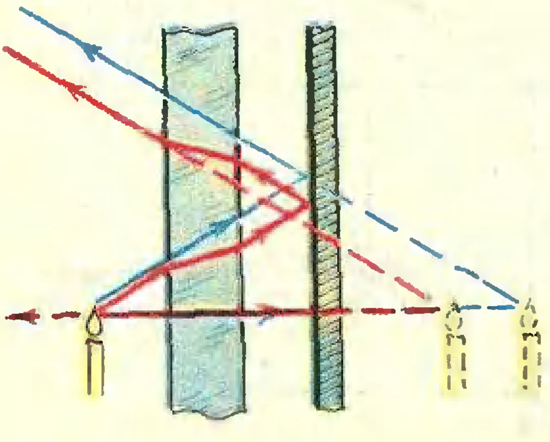


Рис. 10.

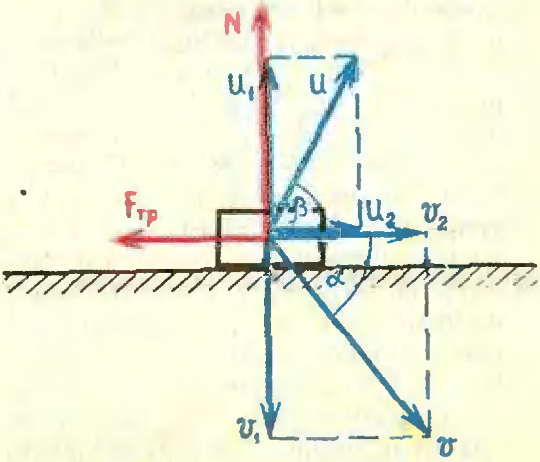


Рис. 11.

ет, что составляющая импульса кубика, перпендикулярная к стенке, меняется на $2mv\sin\alpha$ ($|u_1-v_1| = 2v\sin\alpha$, m — масса кубика).

Если время соударения кубика со стенкой обозначить τ, а средняя величина силы реакции стенки равна $N_{\text{ср}}$, то, согласно второму закону Ньютона, изменение составляющей импульса кубика, перпендикулярной к стенке, равно импульсу силы $N_{\text{ср}}$, то есть

$$2mv\sin\alpha = N_{\text{ср}}\tau.$$

Если бы на кубик не действовала сила трения, то составляющая импульса кубика, параллельная стенке, не изменилась бы и кубик отскочил бы от стенки под тем же углом α, под которым двигался к ней до удара. Однако благодаря действию силы трения в нашем случае меняется и составляющая v_2 скорости кубика. Предположим вначале, что средняя сила трения $F_{\text{тр.ср}} = N_{\text{ср}}k$, действующая на кубик, такова, что за время взаимодействия кубика со стенкой составляющая скорости кубика, параллельная стенке, не успевает уменьшиться до нуля. В этом случае, согласно второму закону Ньютона,

$$mu_2 - mv_2 = -F_{\text{тр.ср}}\tau, \quad \text{или} \quad mu_2 = mv\cos\alpha - N_{\text{ср}}k\tau.$$

Но $N_{\text{ср}}\tau = 2mv\sin\alpha$, поэтому

$$mu_2 = mv\cos\alpha - 2kmv\sin\alpha,$$

или

$$u_2 = v(\cos\alpha - 2k\sin\alpha).$$

Теперь найдем угол, под которым отскочит кубик:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|u_1|}{u_2} = \frac{v\sin\alpha}{v(\cos\alpha - 2k\sin\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 2k\operatorname{tg}\alpha}.$$

Такой ответ получили *В. Гончаренко* из Майкопа Краснодарского края, *М. Гильбург* из Борислава Львовской области, *Н. Смирнов* из Горького, *Б. Заксас* из Усолья-Сибирского Иркутской области, *И. Григик* из Давид-Городка Брестской области, *А. Сенявин* из Москвы, *А. Анищенко* из Сарапула УАССР и *Кудек* из Ржева.

Однако это не полное решение задачи. Это заметили читатели А. Власов из Валдая, Б. Шпарберг из Могилева на Днепре, А. Жуков из Кировска Донецкой области и И. Берман из Черновцов.

Очевидно, наше решение справедливо, если $u_2 > 0$, то есть $2k\operatorname{tg}\alpha < 1$. При $\operatorname{tg}\alpha \to \frac{1}{2k}$ $\operatorname{tg}\beta \to \infty$ и $\beta \to \frac{\pi}{2}$. Что это означает?

Если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2k}$, то $u_2 = v(\cos\alpha - 2k\sin\alpha) = v\left(\cos\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\sin\alpha\right) = 0.$ За время взаимодействия кубика со стенкой составляющая скорости кубика, параллельная стенке, обращается в нуль. А как же будет происходить столкновение со стенкой, если $\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{2k}$?

В этом случае кубик будет проскальзывать относительно стенки не все время удара, а до тех пор, пока составляющая его скорости, параллельная стенке, не обратится в нуль. Вместе с ней обратится в нуль и сила трения, действующая на кубик, и отскочит кубик под углом 90° к стенке.

Итак,

$$\beta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 2k\operatorname{tg}\alpha}\right) & \text{при} \quad \operatorname{tg}\alpha < \dfrac{1}{2k}, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad \operatorname{tg}\alpha \geq \dfrac{1}{2k}. \end{cases}$$

Ф62

Тонкая нерастяжимая веревка состоит из двух частей. Масса единицы длины одной из частей равна ρ_1, а другой — ρ_2. Веревка охватывает очень легкий обруч радиуса R, масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой охватывающей его веревки, концы прикреплены к полу (рис. 12). По участку веревки с массой единицы длины ρ_1 обруч катится со скоростью v_1. С какой скоростью будет катиться обруч по второму участку веревки?

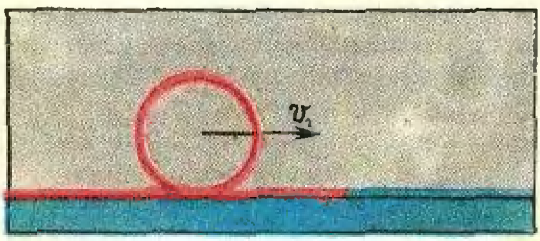
При переходе обруча с одного участка веревки на другой меняется потенциальная энергия веревки. Действительно, когда обруч движется по участку веревки с линейной плотностью ρ_1, потенциальная энергия веревочного кольца равна $m_1gR = \rho_1 2\pi RgR = 2\pi\rho_1R^2g$ (центр масс кольца находится в его центре). Когда же обруч движется по участку веревки с линейной плотностью ρ_2, она равна $m_2gR = 2\pi\rho_2R^2g$. Соответственно меняется и кинетическая энергия веревочного кольца. Так как нет потерь, то мы можем воспользоваться законом сохранения энергии.

Однако для этого нам нужно знать кинетическую энергию кольца массы m, движущегося без проскальзывания по плоскости со скоростью v. Можно воспользоваться результатом, полученным в статье А. К. Кикоина «Вращательное движение тел» («Квант» № 1, 1971):

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Но мы получим эту формулу с помощью нехитрого приема.

Движущееся без проскальзывания кольцо в любой момент времени поворачивается вокруг мгновенного центра вращения — точки касания с плоскостью (рис. 13). Угловая скорость вращения кольца $\omega = \dfrac{v}{R}$. Это означает, что скорость точки A кольца перпендикулярна к отрезку OA и равна $OA\cdot\omega$. Из $\triangle OAD$ $OA = 2R\cos\alpha$. Поэтому $v_A = 2R\omega\cos\alpha = 2v\cos\alpha$. Аналогично, скорость точки B, диаметрально противоположной точке A, равна $v_B = 2v\cos(90^\circ - \alpha) = 2v\sin\alpha$. Кинетическая энергия маленьких участков с массами Δm вблизи точек A и B



$$K_{A+B} = \frac{\Delta m v_A^2}{2} + \frac{\Delta m v_B^2}{2} = \frac{1}{2}\Delta m(4v^2\cos^2\alpha + 4v^2\sin^2\alpha) = 2\Delta m v^2.$$

K_{A+B} не зависит от α. Это означает, что в точности такой же энергией обладает и любая другая пара диаметрально противоположных точек кольца. Поэтому кинетическая энергия всего кольца равна mv^2. Запишем теперь закон сохранения энергии:

$$m_1v_1^2 + m_1gR = m_2v_2^2 + m_2gR;$$

отсюда

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}v_1^2 + gR\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}v_1^2 + gR\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)}.$$

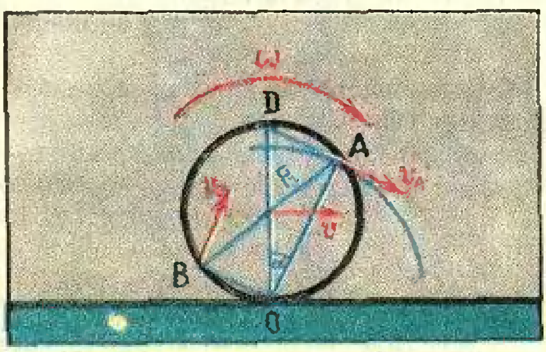


Рис. 13.

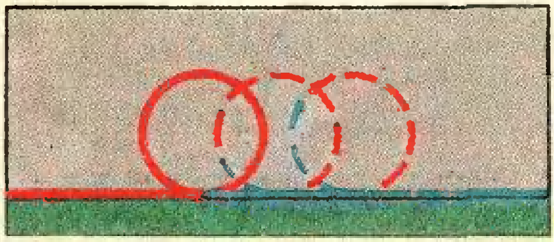


Рис. 14.

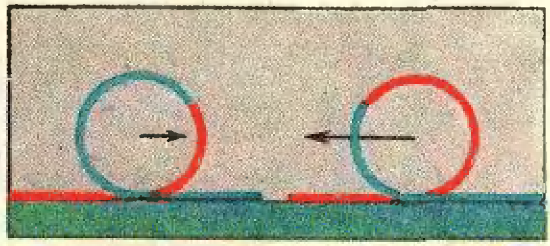


Рис. 15.

Посмотрим теперь, что мы получили. Если $\rho_1 > \rho_2$, то $\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 > 0$ и под корнем стоит положительное число при любой величине v_1, даже при $v_1 = 0$. Ответ при $v_1 = 0$ имеет такой смысл: если обруч стоит так, как показано на рисунке 14, и по случайным причинам начнет двигаться вправо с бесконечно малой скоростью, то, когда с него смотается красная веревка и намотается синяя, он будет иметь скорость $v_2 = \sqrt{gR\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)}$.

Если $\frac{\rho_1}{\rho_2} < 1$, то при $v_1^2 < gR\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)\frac{\rho_2}{\rho_1}$ подкоренное выражение становится отрицательным. Это означает, что при такой скорости обруч не сможет перейти на веревку с линейной плотностью ρ_2. Он намотает часть более тяжелой веревки (рис. 15), остановится и начнет двигаться в обратном направлении.

Правильное решение прислали *В. Якир* из Кишинева, *А. Власов* из Валдая Новгородской области, *И. Берман* из г. Черновцы УССР, *Б. Шпарберг* из Могилева БССР, *А. Анищенко* из Сарапула УАССР, *Е. Губарев* из Москвы.

Ф63

Человек, чтобы не поскользнуться на обледенелой горке, сбегает с нее. Почему это целесообразно?

На человека на горке действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила $\vec{F}_р$, равная сумме силы трения $\vec{F}_{тр}$ и силы $\vec{N}$ — нормальной реакции горки (рис. 16, *а*).

Так как момент силы тяжести относительно центра масс человека равен нулю, то человек будет сохранять равновесие и не «переворачиваться» только в том случае, если сила $\vec{F}_р$ проходит через его центр масс.

Если трение подошв обуви о горку велико и человек стоит на горке, то сумма сил, действующих на человека, равна нулю. То есть сила $\vec{F}_р$ направлена вертикально и равна силе тяжести.

Иное дело, если трение мало. Разберем вначале предельный случай: $\vec{F}_{тр} = 0$. Тогда человек не будет падать, если он перпендикулярен к горке (рис. 16, *б*). Только в этом случае сила $\vec{N}$ реакции горки проходит через центр масс человека. Но равнодействующая $\vec{R}$ сил $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ при этом будет равна нулю. Она направлена параллельно наклонной плоскости и равна $mg \sin\alpha$. Поэтому человек должен спускаться с ускорением $a = g \sin\alpha$.

Если трение мало, но не равно нулю, то ускорение человека должно быть меньше. Записав II закон Ньютона, мы найдем что оно равно $a = g\sin\alpha - \frac{F_{тр}}{m}$.

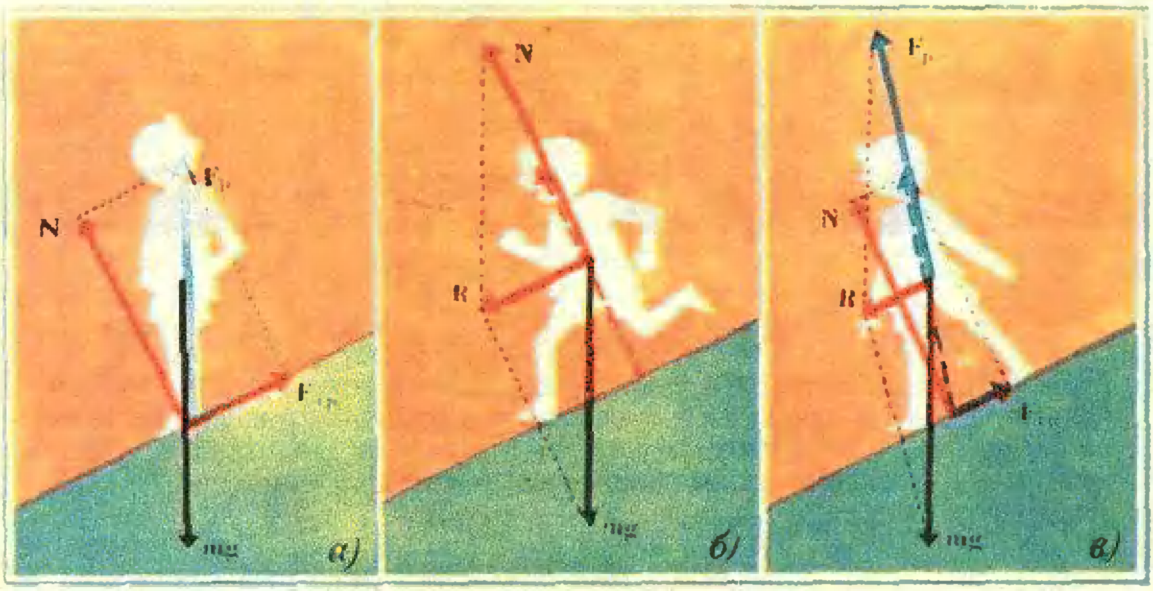


Рис. 16.

Итак, человек может сохранять равновесие, если он бежит с ускорением $a = g\sin\alpha - \frac{F_{тр}}{m}$, составляя с горкой некоторый угол, определяемый величиной силы трения. По существу, при этом человек так же, как, впрочем, и при обычной ходьбе, падает на вынесенную вперед ногу (рис. 16, *в*). Равновесие сохраняется как бы «в среднем» за время, много большее времени одного шага.

Ф64

С деревянным шаром и высоким сосудом с водой проводятся четыре опыта: в первом опыте они взвешиваются, когда шарик плавает в сосуде (рис. 17, *а*), во втором опыте при взвешивании шарик привязан к дну сосуда (рис. 17, б), в третьем опыте он удерживается в сосуде с помощью тонкого стержня (рис. 17, *в*) и, наконец, в четвертом опыте шарик всплывает во время взвешивания (рис. 17, *г*). В каком из опытов масса гири, уравновешивающей сосуд с шариком, больше?

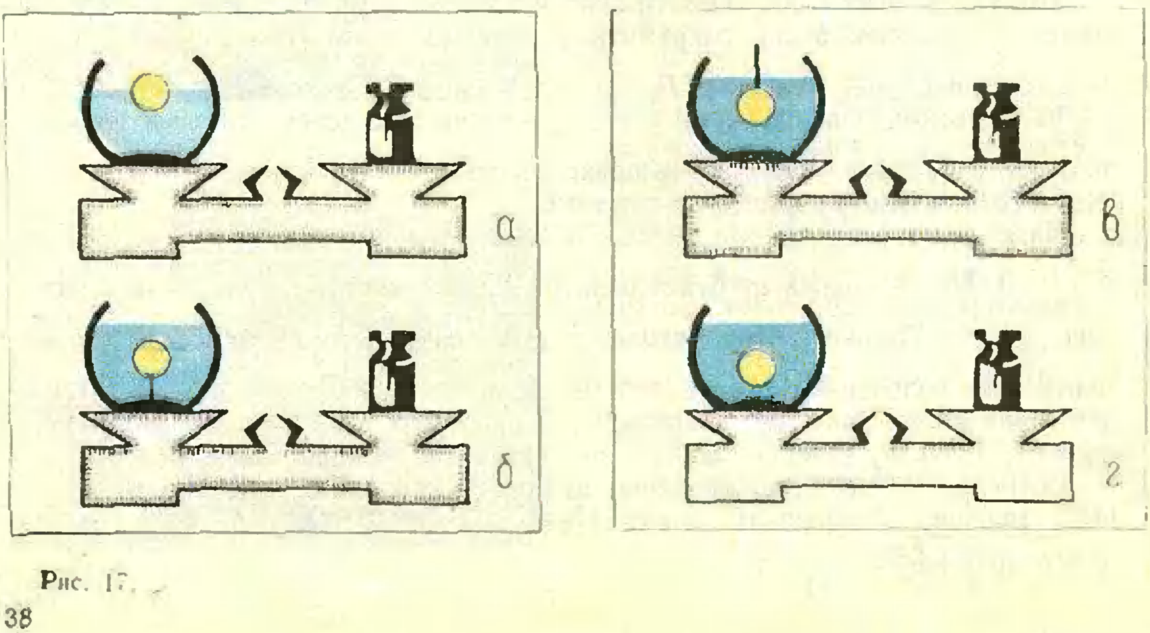


Рис. 17.

В первом и во втором опытах ответ очевиден: масса гири должна быть равна массе сосуда с водой и шариком. Во втором опыте уровень воды больше, чем в первом, и, значит, больше сила давления воды на дно сосуда, но зато на дно действует со стороны шарика через нить сила, направленная вверх.

В третьем опыте к силе тяжести, действующей на сосуд, воду и шарик, прибавляется еще и сила, действующая на систему со стороны стержня. Значит, масса гири должна быть больше, чем в первом и втором опытах.

Если погруженный в воду шарик начинает всплывать, то его скорость увеличивается до тех пор, пока сила сопротивления (она зависит от скорости) не станет равна разности архимедовой выталкивающей силы и силы тяжести. После этого шарик будет двигаться равномерно. Рассмотрим вначале последний случай. Так как шарик движется равномерно, то действующие на него силы уравновешены, то есть сила F, действующая на шарик со стороны воды, направлена вверх и равна по величине силе тяжести mg. Согласно III закону Ньютона это означает, что на воду со стороны шарика действует сила $-F$, равная mg. Таким образом, на чашку весов будет действовать сила, по величине равная сумме сил тяжести, действующих на шарик, сосуд и воду. То есть масса гири должна быть такой же, как в первом и втором опытах.

Рассмотрим теперь случай, когда шарик всплывает ускоренно. При этом в тот момент, когда шарик только начинает всплывать и на него не действует сила сопротивления (пропорциональная при малых скоростях скорости шарика), сосуд с шариком весит столько же, сколько и в третьем опыте. Действительно, согласно III закону Ньютона на воду со стороны шарика в этом случае, как в третьем, так и в четвертом опытах, действует только сила F_0, равная выталкивающей архимедовой силе, действующей на шарик со стороны воды. Она равна ρgV, где V — объем шарика и ρ — плотность воды. Это означает, что в обоих случаях сила давления на чашку весов равна сумме сил тяжести, действующих на воду, сосуд, и силы F_0.

Когда же ускорение шарика в четвертом опыте уменьшается благодаря сопротивлению воды, уменьшается и сила, действующая на воду со стороны шарика: в этом случае сила равна по величине разности архимедовой силы и силы сопротивления.

Мы получили много писем с решением этой задачи, но до конца разобрались в ней только два читателя: *Н. Федин* из Омска и *Н. Смирнов* из Горького.

Ф65

Пластины плоского конденсатора заряжены до потенциалов $+\varphi$ и $-\varphi$ относительно земли. Емкость конденсатора, образованного пластинами, равна C, а емкость конденсаторов, которые образует каждая из пластин с землей, C_1. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля между пластинами, если одну из них заземлить?

Нарисуем эквивалентную схему цепи (рис. 18). Так как разность потенциалов между пластинами конденсатора емкости C равна 2φ, то заряд каждой из пластин равен

$$q = C\cdot 2\varphi = 2C\varphi.$$

На пластинах же конденсаторов емкостью C_1 в этом случае находятся заряды $q_1 = C_1\varphi$. Это означает, что заряд пластины II равен

$$Q = q+q_1 = (2C + C_1)\varphi.$$

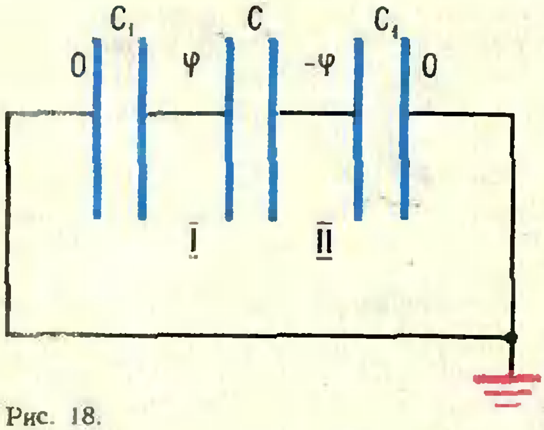


Рис. 18.

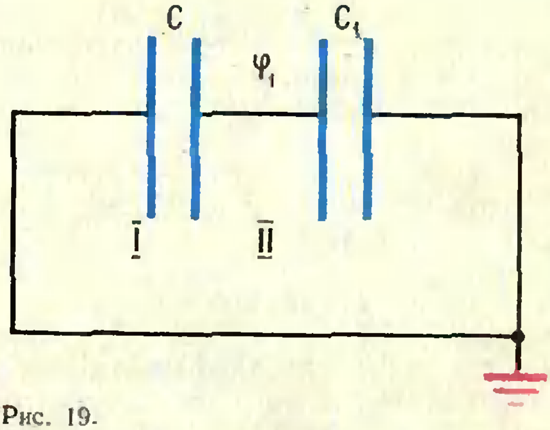


Рис. 19.

После того как пластина *I* будет заземлена, цепь станет такой, как показано на рисунке 19. При этом потенциалы пластин тоже изменятся. Обозначим потенциал пластины *II* через φ_1. На пластинах конденсатора емкости C будет заряд $q' = C\varphi_1$, а на пластинах конденсатора C_1 — заряд $q_1' = C_1\varphi_1$. Суммарный же заряд пластины *II* должен быть равен Q. Поэтому

$$(2C + C_1)\varphi = C_1\varphi_1 + C\varphi_1.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{2C + C_1}{C + C_1}\varphi.$$

Так как напряженность поля в конденсаторе равна $\frac{\Delta\varphi}{d}$ ($\Delta\varphi$ — разность потенциалов пластин и d — расстояние между ними), то

$$\frac{E}{E_1} = \frac{2\varphi}{\varphi_1} = \frac{2(C + C_1)}{2C + C_1}.$$

Такое решение прислали *А. Жуков* из Кировска Донецкой области и *Н. Федин* из Омска.

И. Ш. Слободецкий

ТРИ ЗАДАЧИ

1. Сколько различных пар натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, беря каждую из них лишь один раз (например, 136 и 245 978, 9742 и 13865 и т. д.)? Какая из этих пар имеет наибольшее произведение?

2. Восстановите пример на деление:

```
××  ××× ××× | ×××
××  ××      |------
----------- | ×7×××
    ×××
    ×××
    -----
    ××× ×
     ×× ×
    -------
       × ×××
       × ×××
```

3. Дан полукруг радиуса R. Найти круг наименьшего радиуса, в который можно поместить без наложений друг на друга части, получаемые разбиением полукруга на секторы (размер и число секторов могут быть произвольными).

О задачах по фотометрии

В. Е. Белонучкин

Большие затруднения у поступающих в институты вызывают обычно задачи по фотометрии.

В значительной степени это связано с неумением правильно применять закон обратных квадратов.

Чтобы ясно представить смысл того или иного закона, надо понять, из каких соображений и в каких предположениях он получен, когда он справедлив и когда нет, как его надо уточнить, если нельзя применить сразу.

Что же такое закон обратных квадратов?

Вспомним его содержание: освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

А что такое освещенность? Как известно, это отношение светового потока к площади, на которую он падает; если свет исходит из точки O (рис. 1) и равномерно распространяется во все стороны, то, например, до площадки P_1 и площадки P_2, которые видны из точки O в одинаковых телесных углах, дойдут одинаковые световые потоки. А площади пропорциональны квадратам расстояний от точки O. Следует отметить, что это рассуждение справедливо для точечного источника, который равномерно излучает свет по разным направлениям, то есть в любые два одинаковых телесных угла излучаются одинаковые световые потоки.

Если источник света обладает такими свойствами, то закон обратных квадратов — это просто конкретное выражение закона сохранения энергии: в силу прямолинейности распространения света одна и та же энергия (один и тот же световой поток) попадает на площадку, загораживающую данный телесный угол, независимо от того, на каком расстоянии от источника находится эта площадка.

Поэтому исчерпывающей характеристикой точечного источника света является сила света — световой поток, излучаемый источником в единичный телесный угол. Если с помощью какого-либо оптического элемента (линзы, зеркала) получено изображение, то оно, естественно, также является источником света. Что можно сказать о его силе света?

К сожалению, многие склонны считать очевидным, что сила света изображения всегда равна силе света источника. Так ли это? Далеко не всегда. При этом мы не имеем в виду поглощение и рассеяние света линза-

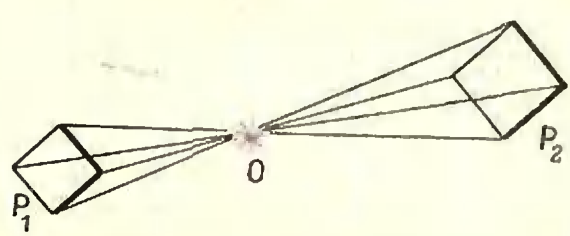


Рис. 1.

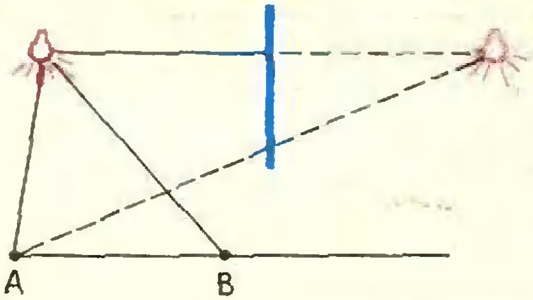


Рис. 2.

ми и зеркалами; эти потери учитывать мы не будем. Есть другие причины различий в силе света источников и их изображений.

Во-первых, изображение практически никогда не излучает одинаково во всех направлениях; связано это, в частности, с конечными размерами линз и зеркал. Плоское зеркало, например, не меняет силы света: сила света изображения равна силе света источника. Однако, нужно учитывать, что изображение излучает свет не во всех направлениях. Действительно, точку A (рис. 2) освещают и лампа, и ее изображение в зеркале, а точку B изображение освещать не может. Сила света изображения в этом направлении равна нулю.

Рассмотрим другой пример. Источник O освещает экран P через рассеивающую линзу $Л$ (рис. 3). Изображение источника O' находится ближе к экрану, чем источник; если у него сила света такая же, как у источника, то экран освещен ярче, чем было бы без линзы. А что даст прямое рассмотрение световых потоков?

Когда не было линзы, на экран попадал весь свет, который шел в конусе AOB. При наличии линзы часть этого света проходит мимо экрана, и освещенность экрана должна уменьшиться.

Очевидно, это связано с тем, что сила света изображения O' меньше силы света источника O. Действительно, ведь силой света называется отношение светового потока к телесному углу, а мы видим, что после линзы свет распространяется в больший телесный угол, причем

$$\frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{(O'Л)^2}{(OЛ)^2}.$$

Следовательно, $\frac{I_0}{(OЛ)^2} = \frac{I_1}{(O'Л)^2}$. Если освещенность экрана без линзы была $E_0 = \frac{I_0}{(OC)^2}$, то с линзой

$$E_1 = \frac{I_1}{(O'C)^2} = \frac{E_0\,(O'Л)^2\,(OC)^2}{(OЛ)^2\,(O'C)^2} < E_0.$$

Отношение сил света изображения и источника всегда равно отношению квадратов их расстояний от оптического элемента, создающего изображение. Докажем это, например, для изображения в вогнутом зеркале.

Пусть O — источник света, а O' — его изображение в зеркале AB (рис. 4). Тогда световой поток, излучаемый источником в конус AOB, после отражения от зеркала и прохождения точки O' распространяется в конусе $A'O'B'$, по величине равном $AO'B$. (Под величиной конуса, естест-

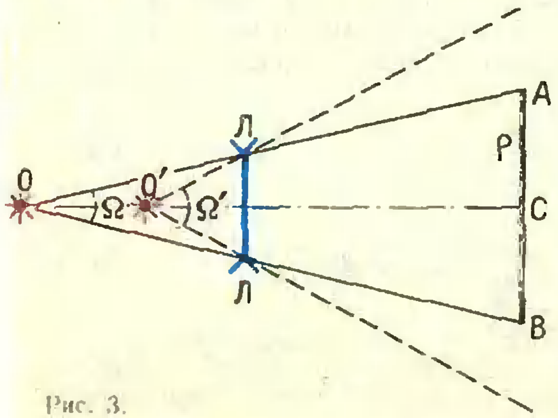


Рис. 3.

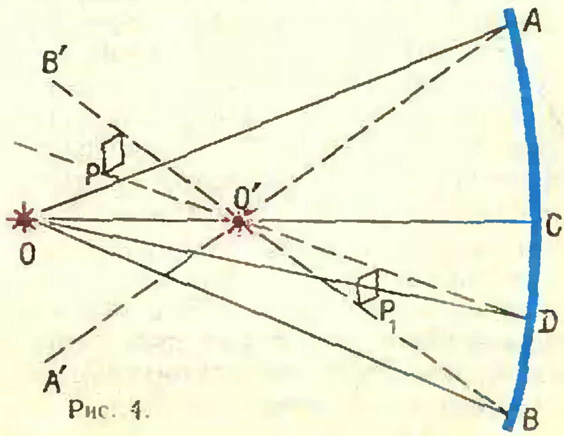


Рис. 4.

венно, подразумевается соответствующий ему телесный угол.)

Пусть сила света источника O равна I. Световой поток распространяется в конусе AOB и равен $I\frac{S_{AB}}{(OC)^2}$, где S_{AB} — площадь поверхности зеркала AB. От изображения O' световой поток идет в телесный угол, равный $\frac{S_{AB}}{(O'C)^2}$; значит, сила света изображения

$$I' = I\frac{(O'C)^2}{(OC)^2}.$$

И для этого случая мы получили ожидаемое соотношение.

Интересно отметить еще один факт. Рассмотрим освещенности площадок P и P_1 (рис. 4). Для P все ясно: левая ее поверхность освещена источником O, и освещенность

$$E = \frac{I}{(OP)^2};$$

правая поверхность освещена изображением O', ее освещенность

$$E' = \frac{I'}{(O'P)^2}.$$

А что делается на поверхности площадки P_1? Через эту площадку должен пройти весь свет, отражающийся на участке зеркала между точками B и D. Этот поток осветит правую поверхность площадки; ее освещенность

$$E_{P_1} = E_{BD}\frac{S_{BD}}{S_{P_1}} = E_{BD}\frac{(O'C)^2}{(O'P_1)^2}.$$

С другой стороны,

$$E_{BD} = \frac{I}{(OC)^2} = \frac{I'}{(O'C)^2}.$$

Таким образом, освещенность правой стороны площадки P_1, обозначенная E_{P_1}, равна $\frac{I'}{(O'P_1)^2}$, как будто эта сторона площадки освещается изображением O'. Это, впрочем, и естественно, так как свет уже отразился от зеркала.

Левая сторона площадки P_1 освещается самим источником O, и ее освещенность равна $\frac{I}{(OP_1)^2}$ *).

Когда же сила света изображения равна силе света источника? Тогда и только тогда, когда расстояния от источника и от изображения до оптического элемента (линзы, зеркала), создающего это изображение, равны между собой. В частности, сила света изображения, полученного в плоском зеркале, всегда равна силе света источника. В собирающей линзе и вогнутом зеркале такое равенство осуществляется при расположении источника на двойном фокусном расстоянии, а в рассеивающей линзе и выпуклом зеркале получить изображение действительного источника света той же силы, что и сам источник, невозможно.

Почему сделана оговорка относительно действительного источника? Давайте проверим, нельзя ли получить в рассеивающей линзе изображение на том же расстоянии от нее, что и источник. Если абсолютную величину фокусного расстояния линзы обозначить F, то формула линзы в интересующем нас случае будет выглядеть так: $-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d}$, откуда $d = -2F$. Знак «минус» перед расстоянием от линзы до изображения означает мнимость изображения. Очевидно, мнимым должен быть источник. Проще говоря, на линзу должен падать сходящийся пучок света. Пример такой ситуации показан на рисунке 5, где $Л_1$ и $Л_2$ — соответственно собирающая и рассеивающая линзы с одинаковыми по величине фокусными расстояниями, а O — источник света. Если убрать $Л_2$, то мы получим изображение O' с той же силой света, что и источник.

---

*) Отметим, что при решении задачи мы считали равными некоторые расстояния, например OA, OB, OC и OD, которые, конечно, не точно равны друг другу. Разница между ними может считаться малой, если по сравнению с ними малы расстояния AC, CD и т. д.

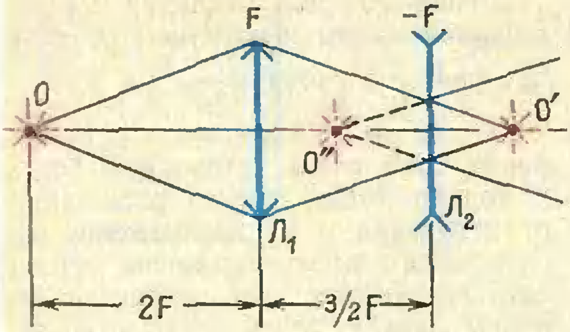


Рис. 5.

Предоставляем читателю убедиться, что такая же сила света будет и у изображения O''.

Следует обратить внимание на то, что вопрос о силе света окончательного изображения решался последовательно, в два этапа. Конкретно, ни $\frac{(OЛ_1)^2}{(Л_1O')^2}$, ни $\frac{(OЛ_1)^2}{(Л_2O'')^2}$, ни $\frac{(OЛ_2)^2}{(Л_2O'')^2}$ не определяют отношения сил света источников O и O'', хотя часто можно встретить решения, в которых одно из этих отношений принимается за отношение сил света изображения и источника.

Вообще всегда несколько линз можно заменить одной, полностью им эквивалентной. Но такая линза, как правило (исключением является случай, когда линзы прижаты друг к другу вплотную), не может считаться тонкой. У нее две не совпадающие друг с другом главные плоскости, от которых следует отсчитывать расстояния до источника и до изображения. У тонкой линзы обе главные плоскости совпадают друг с другом и с плоскостью самой линзы.

1. Какова сила света изображения, если источник помещен в фокальной плоскости собирающей линзы?

2. В воде на глубине H расположен точечный источник света силы I. На одной вертикали с ним на высоте H над поверхностью воды находится небольшой экран. Найти освещенность экрана. Показатель преломления воды n.

3. На оси собирающей линзы на расстоянии a от нее находится точечный источник света. По другую сторону линзы ставится экран. При расстояниях от линзы до экрана, равных $в$ и $с$, освещенность светлого пятна на экране оказывается одинаковой. Определить фокусное расстояние линзы.

4. В системе оптической связи передающий луч лазера имеет вид конуса с углом при вершине $A=10^{-4}$ *рад* (угол расходимости пучка). В приемном устройстве световая энергия фокусируется с помощью линзы диаметра $D = 1$ *м* на фотоэлемент. Оказалось, что при изменении расстояния L между передатчиком и приемником с 5 до 10 *км* сигнал на выходе фотоэлемента уменьшился в 2 раза (из-за поглощения в атмосфере). Во сколько раз изменится сигнал при увеличении расстояния с 10 до 20 *км*?

ОБМАНЫ ЗРЕНИЯ

Взгляните на рисунок слева, на котором видны две линии — горизонтальная и вертикальная. Наверное, вам кажется, что вертикальная линия по крайней мере на $^1/_3$ длиннее горизонтальной, в то время как они совершенно одинаковы.

А вот взгляните на два квадрата. Один прочерчен вертикальными линиями, другой — горизонтальными. Конечно, всякий скажет, что второй квадрат шире и промежутки между горизонтальными полосками шире, чем между вертикальными. А между тем они совершенно одинаковы. Поэтому люди низкого роста, которые хотят казаться более высокими, часто носят платья с вертикальными полосами.

(Б. Донат. Физика в играх. Изд-во детской литературы, М.—Л., 1937.)

Вступительные экзамены по математике в Московском текстильном институте в 1970 году

Т. И. Берхина, Э. М. Кан

Вступительные экзамены в МТИ проводятся в полном соответствии с программой по математике для поступающих в вузы. Как и во всех технических вузах, математика является профилирующим предметом при поступлении в МТИ.

На факультетах энерго-механическом и текстильного машиностроения абитуриенты сдают два экзамена по математике: письменный и устный. На механико-технологическом, химико-технологическом и инженерно-экономическом факультетах проводится один экзамен по математике — устный. На всех факультетах медалисты сдают экзамен по математике.

Разберем один из вариантов, предлагавшийся на письменном экзамене.

Вариант

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x - 1 = \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x + 1}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_5^4 (x-1)^2 + \log_5^2 (x-1)^3 = 25.$$

3. Упростить при $0 < a \leqslant 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1) + \left(\sqrt[3]{a\sqrt{a}} - 1\right)^2 - \left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}.$$

4. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α, боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

Разбор задач варианта

1. Находим ОДЗ уравнения $x \neq \frac{\pi}{2} l$, $x \neq \frac{\pi}{4}(4m-1)$ (l, $m = 0, \pm 1, \ldots$). Теперь преобразуем левую часть: $(\operatorname{ctg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = \cos 2x$,

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \cos 2x,$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x \sin 2x,$$

$$\cos 2x\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0. \qquad (*)$$

Так как второй сомножитель в (*) отличен от нуля ($\sin 2x \neq 2$), то $\cos 2x = 0$ и

$$x = \frac{\pi}{4}(2k+1) \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Учитывая ОДЗ, исключаем те значения x, которые получаются при нечетных k.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{4}(4n+1) \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Решение этого примера не вызвало особых затруднений, однако многие получили лишние корни, так как не учитывали ОДЗ.

2. ОДЗ уравнения таково: $x > 1$. Преобразуем левую часть, используя свойства логарифмов:

$$16 \log_5^4 (x-1) + 9 \log_5^2 (x-1) = 25.$$

Решая полученное биквадратное уравнение, которое равносильно заданному, находим

$$\log_5^2(x-1)=1 \text{ или } \log_5^2(x-1)=-\frac{25}{16}.$$

Последнее равенство невозможно, остается $\log_5(x-1)=\pm 1$, откуда $x_1=6, x_2=\frac{6}{5}$.

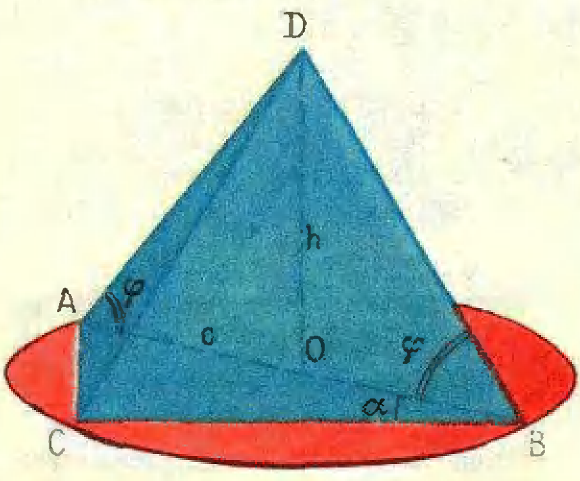
Типичная ошибка: многие абитуриенты забывали возводить в соответствующую степень показатели 2 и 3 при вынесении их за знак логарифма.

3. Сначала находим допустимые значения a и b: $a\neq -b$. Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+(\sqrt{a}-1)^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\sqrt[6]{a}(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a})}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+a-2\sqrt{a}+1-\right.$$
$$\left.-(2\sqrt[6]{a})^3\right]^{\frac{1}{2}}=[a-2\sqrt{a}+1]^{\frac{1}{2}}=$$
$$=|\sqrt{a}-1|=1-\sqrt{a}.$$

При решении этого примера абитуриенты не всегда обращали внимание на условие $0<a\leqslant 1$ и поэтому допускали ошибку при извлечении квадратного корня.

4. Высота пирамиды (см. рисунок) пройдет через центр O круга, описанного около основания, так как боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Известно, что в прямоугольном треугольнике центр описанного круга лежит в середине гипотенузы.



Объем пирамиды: $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h$. Из ΔABC находим

$$BC=c\cos\alpha,\ AC=c\sin\alpha,$$
$$S_{\Delta ABC}=\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{c^2\sin 2\alpha}{4}.$$

Высоту пирамиды находим из прямоугольного ΔDOA: $DO=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\varphi$. Таким образом,

$$V=\frac{1}{3}\frac{c^2\sin 2\alpha}{4}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\varphi=$$
$$=\frac{1}{24}c^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi.$$

Ответ: $V=\frac{1}{24}c^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi$.

В этой несложной задаче некоторые абитуриенты испытывали затруднения при построении чертежа (неверно была изображена высота).

Разберем еще несколько примеров, предлагавшихся на письменном и устном экзаменах.

1. *Решить уравнение*

$$7\cos x+2\sin 3x\cos 2x-\sin 5x=5.$$

Преобразуя второй член в сумму, приводим уравнение к виду

$$7\cos x+\sin x=5.$$

Теперь можно использовать половинный угол для сведения уравнения к однородному или решать это уравнение с помощью введения вспомогательного угла.

Ответ:

$$x_1=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,$$
$$x_2=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2k\pi$$
$$(n,\ k=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

2. *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{2}{9}}[\log_3(x^2-6)]>0.$$

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-6>0, \\ 0<\log_3(x^2-6)<1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2-6>0, \\ 1<x^2-6<3. \end{cases}$$

Второе неравенство включает в себя первое, из него и находим $7<x^2<9$, $\sqrt{7}<|x|<3$.

Ответ:

$\sqrt{7}<x<3$ или $-3<x<-\sqrt{7}$.

В этой задаче многие абитуриенты не учитывали, что основание внешнего логарифма меньше 1, а некоторые забыли про знак модуля и потеряли вторую часть ответа.

В заключение приводим один вариант письменной работы и отдельные задачи из письменных работ и устных экзаменов для самостоятельного решения.

Вариант

Решить уравнения:

1. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x-\sin x\sin 3x-$
$$-\sin 2x\sin 3x=0.$$

2. $2\lg 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3-$
$$-\lg\left(\sqrt[x]{3}+27\right)=0.$$

3. Упростить:

$$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-$$
$$-\sqrt[6]{x}.$$

4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

Отдельные задачи

Решить уравнения:

5. $\sin^4 x+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x.$

6. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\cos 7x.$

7. $\operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$

8. Преобразовать в произведение:
$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+$
$$+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

9. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi.$

Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решить уравнения:

10. $\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0.$
11. $10^{\lg^2 x}+x^{\lg x}=20.$
12. $\lg^2 10x+\lg x=19.$
13. $4^{\log_2 x}+x^2=8.$
14. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$

Решить неравенства:

15. $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}>5\cdot 0{,}04^{x-1}.$

16. $0{,}8^{\frac{3-x}{1-x}}<\frac{16}{25}.$

17. $\lg x^2<\lg^2 x.$
18. $(x^2-4)\log_{0{,}5}x>0.$
19. $\log_{0{,}5}(2x+6)>\log_{0{,}5}(x+8).$
20. $\frac{|2x-3|-x}{x-2}>0.$

21. При каких значениях a уравнение
$$(5a-1)x^2-(5a+2)x+(3a-2)=0$$
имеет равные корни?

22. Упростить:
$$4x^4\left(\frac{x}{a}\sqrt[0{,}2]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-5\sqrt[0{,}4]{\sqrt[5]{a}\,x^{-0{,}6}}+$$
$$+\frac{3x}{a}\sqrt[0{,}2]{a^{-0{,}2}\sqrt{ax^{-1}}}$$

23. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

24. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Определить углы прямоугольного треугольника.

Письменный экзамен по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1970 году

А. Г. Кушниренко, С. В. Фомин

Письменный экзамен по математике сдается при поступлении на следующие гуманитарные факультеты МГУ: психологический, экономический и отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета *). Об уровне требований по математике, предъявляемых к абитуриентам, поступающим на эти факультеты, можно судить по приведенным ниже вариантам письменного экзамена 1970 года, а также по вариантам 1969 года **).

На отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета на письменную работу давалось 5 часов (300 минут). Для получения пятерки требовалось решить первые три задачи и любые две из последних четырех. Практически пятерка ставилась и за чуть худшую работу, а положительную оценку получали во всяком случае те абитуриенты, которые решили не менее двух задач, из которых хотя бы одна входила в число первых трех задач.

Варианты письменного экзамена на отделении экономической кибернетики экономического факультета здесь не приводятся, с уровнем требований по математике на этом отделении лучше познакомиться по вариантам 1969 года.

На психологическом факультете и на отделении политической экономии экономического факультета на письменную работу отводилось 4 часа (240 минут) и для получения пятерки требовалось решить все 4 задачи. Практически пятерка ставилась и за чуть худшую работу, а положительную оценку гарантировало решение любых двух задач. Ниже мы разберем решения некоторых задач подробно, а к некоторым дадим лишь ответы. имые ниже варианты являются реальными (не сборными).

Филологический факультет

Вариант

1. В соревнованиях участвовали три байдарки. Первая байдарка проходит каждые 100 *м* на 2 *сек* быстрее второй и на 3 *сек* быстрее третьей. За какое время первая байдарка прошла один километр, если за каждые 30 *сек* вторая байдарка опережает третью на 60/13 *м*?

2. Найти все x, для которых $0,5<x<2,5$ и которые удовлетворяют неравенству $\log_{3x-x^2}(3a-ax)<1$ при всех a из промежутка $0<a<2$.

*) На отделении экономической кибернетики экономического факультета и на отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета сдается также и устный экзамен по математике.

**) Их можно найти в статье «Гуманитарии сдают математику» («Квант» № 4, 1970).

3. Найти все x, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi$ и являющиеся решением уравнения $1+\cos x+\cos 2x = \sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

4. Доказать, что $11n^2-14n+3 \geqslant 0$ при всех целых n.

5. Не пользуясь таблицами, доказать, что $\operatorname{tg} 208° < \sin 492°$

6. В окружность вписан треугольник со сторонами 7, 24, 25. Вычислить площадь кругового сегмента, стянутого хордой, длина которой 7.

7. Сколькими способами сумму 4 руб. 96 коп. можно составить из монет по 2 и 15 коп.?

Решения задач

1. Ответ: первая байдарка прошла 1 *км* за 230 *сек*.

2. Прежде всего докажем, что при $0{,}5 < x < 2{,}5$ выполняется неравенство $3x-x^2>1$. Действительно, $3x-x^2 = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$, но при наших ограничениях $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < 1$, следовательно, $3x-x^2 > \frac{5}{4} > 1$. Поскольку основание логарифма больше 1, неравенство можно переписать так: $3x-x^2 > 3a-ax$ или

$$x(3-x) > a(3-x). \qquad (*)$$

Мы должны найти все x из промежутка $0{,}5 < x < 2{,}5$, которые являются решением неравенства (*) при всех a из промежутка $0 < a < 2$. Для любого x из промежутка $0{,}5 < x < 2{,}5$ выполняется неравенство $3-x>0$, и, значит, неравенство (*) эквивалентно неравенству $x > a$.

При всех a из промежутка $0 < a < 2$ неравенству $x > a$ удовлетворяют все $x \geqslant 2$; учитывая неравенство $0{,}5 < x < 2{,}5$, получаем ответ: $2 \leqslant x < 2{,}5$.

3. $1+\cos x+\cos 2x = \sin x+\sin 2x+\sin 3x$,

$\cos x\,(1+2\cos x) = \sin 2x\,(1+2\cos x)$, $\quad \cos x\,(1+2\cos x)(1-2\sin x) = 0$.

Последнее уравнение эквивалентно исходному. Будем решать его и для каждой серии ответов проверять условие $\frac{\pi}{2} < \left|3x-\frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi$.

I. $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Отсюда $\left|3x - \frac{\pi}{2}\right| = \left|3\frac{\pi}{2} + 3\pi k - \frac{\pi}{2}\right| = |(3k+1)\pi|$. При $k=0$ $\left|3x-\frac{\pi}{2}\right| = \pi$, то есть наше условие выполняется $\left(\frac{\pi}{2} < \pi \leqslant \pi\right)$, и, значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi\cdot 0 = \frac{\pi}{2}$ является ответом задачи. Если же $k \neq 0$, то, как легко видеть, $|(3k+1)\pi| \geqslant 2\pi$ и из серии корней вида $\frac{\pi}{2} + k\pi$ только $x = \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет нашему условию.

II. $1+2\cos x = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. Отсюда

$$\left|3x - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\pm 2\pi + 6k\pi - \frac{\pi}{2}\right| = \left|(3k \pm 1)2\pi - \frac{\pi}{2}\right|.$$

При любом k последнее выражение слишком велико:

а) $k=0$, $\quad \left|(3k\pm 1)2\pi - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\pm 2\pi - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \frac{3\pi}{2}$;

б) $k \neq 0$, $\quad \left|(3k\pm 1)2\pi - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant |(3k\pm 1)2\pi| - \left|\frac{\pi}{2}\right| \geqslant 4\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$.

Таким образом, ни одно значение x из серии $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ не удовлетворяет условию.

III. $1-2\sin x=0$; а) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; б) $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

а) $\left|3x-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\frac{\pi}{2}+6k\pi-\frac{\pi}{2}\right|=|6k\pi|$. Если $k=0$, то

$\left|3x-\frac{\pi}{2}\right|=0<\frac{\pi}{2}$; если $k\neq 0$, то $\left|3x-\frac{\pi}{2}\right|\geqslant|6\pi|>\pi$.

б) $\left|3x-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\frac{5}{2}\pi+6k\pi-\frac{\pi}{2}\right|=|2\pi+6k\pi|\geqslant 2\pi$.

Таким образом, ни одно из решений уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}$.

4. Найдем, при каких x трехчлен $11x^2-14x+3$ меньше нуля. Этот трехчлен имеет корни $x_1=\frac{3}{11}$, $x_2=1$. Таким образом, $11x^2-14x+3<0$ при $\frac{3}{11}<x<1$. Но в последнем промежутке нет ни одного целого числа, значит, при всех целых n $11n^2-14n+3\geqslant 0$.

5. Очевидно, $\operatorname{tg}208^\circ=\operatorname{tg}28^\circ<\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin 492^\circ=\sin 48^\circ>$ $>\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Но $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $\operatorname{tg}208^\circ<\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}}<$ $<\sin 492^\circ$, что и требовалось доказать.

6. Указание: по теореме, обратной к теореме Пифагора, наш треугольник прямоугольный ($7^2+24^2=25^2$). Ответ: $\frac{625}{4}\arcsin\frac{7}{25}-42$.

7. Заметим, что каждый способ вполне определяется числом 15-копеечных монет. Посмотрим, каково может быть это число. Поскольку общая сумма (496 коп.) четна и любая сумма, составленная из 2-копеечных монет также четна, то число 15-копеечных монет должно быть четно. Кроме того, это число неотрицательно и не слишком велико, так как в любом способе сумма, составленная из 15-копеечных монет, неотрицательна и не превосходит 496, то есть $0\leqslant 2n\cdot 15\leqslant 496$. Легко видеть, что никаких других условий на число 15-копеечных монет нет: если мы составим из четного числа 15-копеечных монет любую сумму, не превосходящую 496 коп., то недостающую сумму (она четна) всегда можно составить из 2-копеечных монет. Осталось решить в целых числах неравенство $0\leqslant 2n\cdot 15\leqslant 496$, или $0\leqslant n\leqslant 16\frac{16}{30}$.

Ясно, что это неравенство имеет 17 целых решений: $n=0, 1, 2, \ldots, 16$.

Ответ: 17 способов.

Наибольшие затруднения в этом варианте вызвали задачи 2 и 3, скорее всего из-за не совсем обычной формулировки. Судя по работам, некоторые абитуриенты не сумели до конца понять условия этих задач. Так, например, в задаче 3 некоторые абитуриенты просто решали (притом не всегда верно) тригонометрическое уравнение, не учитывая дополнительного условия на x. Другие абитуриенты, получив бесконечное число решений тригонометрического уравнения и понимая, что нужно проверять выполнение дополнительного условия, не смогли провести такую проверку. «Раскрыв модуль» в дополнительном условии, многие не смогли довести проверку до конца.

Психологический факультет (дневное отделение)

Вариант 1

1. Два одинаковых парохода отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй — от пристани B вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там 45 *мин* и возвращается обратно. Если пароходы отправляются от начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке K, которая в 2 раза ближе к A, чем к B. Если первый пароход отходит от A на 1 час позже, чем второй пароход отходит от B, то на обратном пути они встречаются в 20 *км* от A. Если первый пароход отходит от A на 30 *мин* раньше, чем второй отходит от B, то на обратном пути пароходы встречаются в 5 *км* выше K. Найти скорость реки и время, за которое второй пароход доходит от A до K.

2. Найти все действительные значения a, при которых уравнение

$$x^8+ax^4+1=0$$

имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

3. Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\cos x^2}\left(\frac{3}{x}-2x\right)<\log_{\cos x^2}(2x-1).$$

4. В правильную треугольную пирамиду помещены 3 шара так, что 1-й шар касается всех боковых граней пирамиды и 2-го шара, а 2-й шар касается боковых граней и 3-го шара, а 3-й шар касается боковых граней, основания пирамиды и 2-го шара. Какую долю объема пирамиды занимают три шара, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом α?

Решения задач

1. По условию задачи пароходы одинаковы, значит, и скорости пароходов в стоячей воде одинаковы. Обозначим эту скорость через v (*км/ч*). Обозначим через v_0 (*км/ч*) скорость реки, через S (*км*) — расстояние между A и B. Ниже время будем измерять в часах и размерности всех величин будем опускать. Сравнивая времена, которые затратили пароходы на путь от момента выхода до момента встречи на обратном пути (включая и стоянку), составляем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v+v_0}+\dfrac{\frac{2S}{3}}{v-v_0}=\dfrac{S}{v-v_0}+\dfrac{\frac{S}{3}}{v+v_0}, \\[2ex] \dfrac{S}{v+v_0}+\dfrac{S-20}{v-v_0}+1=\dfrac{S}{v-v_0}+\dfrac{20}{v+v_0}, \\[2ex] \dfrac{S}{v+v_0}+\dfrac{\frac{2S}{3}+5}{v-v_0}=\dfrac{S}{v-v_0}+\dfrac{\frac{S}{3}-5}{v+v_0}+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $v=3v_0$, а из первого и третьего находим: $v_0=7{,}5$; $v=22{,}5$. Подставляя во второе уравнение эти значения v и v_0, находим $S=30$, откуда $AK=10$. Значит, второй пароход доходит от A до K за $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ часа. Ответ: скорость реки 7,5 *км/ч*, и второй пароход доходит от A до K за 20 *мин*.

2. Нетрудно догадаться, что исходное уравнение сводится к квадратному. Уравнения такого вида разбираются в школьном учебнике. Положим $x^4=t$. Тогда уравнение перепишется в виде $t^2+at+1=0$. Пусть t_1 и t_2 — действительные корни этого уравнения. Легко видеть, что t_1 и t_2 должны быть положительны и различны. Предположим для определенности, что $0<t_1<t_2$. Тогда исходное уравнение имеет следующие корни (занумерованные в порядке возрастания): $x_1=-\sqrt[4]{t_2}$, $x_2=-\sqrt[4]{t_1}$, $x_3=\sqrt[4]{t_1}$, $x_4=\sqrt[4]{t_2}$.

Чтобы эти четыре корня образовывали арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3$ или $\sqrt[4]{t_2}-\sqrt[4]{t_1}=2\sqrt[4]{t_1}=\sqrt[4]{t_2}-\sqrt[4]{t_1}$, то есть $2\sqrt[4]{t_1}=\sqrt[4]{t_2}-\sqrt[4]{t_1}$, $3\sqrt[4]{t_1}=\sqrt[4]{t_2}$, $81t_1=t_2$.

Теперь воспользуемся теоремой Виета. Если $81t_1=t_2$, то $81t_1^2=t_1\cdot t_2$. Но по теореме Виета $t_1t_2=1$, поэтому $81t_1^2=1$, $t_1=\pm\frac{1}{9}$, $t_2=\pm 9$. Но мы требуем, чтобы t_1 и t_2 были положительны, значит, $t_1=\frac{1}{9}$, $t_2=9$. Таким образом, найденные значения t_1 и t_2 являются единственно возможными. Посмотрим, могут ли получиться такие корни при каких-нибудь значениях a. Снова по теореме Виета находим, что единственно возможным значением a является $a=-(t_1+t_2)=-9\frac{1}{9}$. Но есть теорема, обратная к теореме Виета, о том, что если $x_1x_2=q$ и $x_1+x_2=-p$, то числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$. Значит, числа $\frac{1}{9}$ и 9 действительно являются корнями уравнения $t^2-\left(\frac{1}{9}+9\right)t+\frac{1}{9}\cdot 9=0$.

Ответ: $a=-9\frac{1}{9}$.

Бóльшая часть абитуриентов не пользовалась теоремой Виета, а записывала корни в виде

$$t_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2},\quad t_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2},$$

откуда и находила a. Решение получалось сложнее и длиннее.

3. Легко видеть, что ОДЗ задается тремя неравенствами:

1) $\frac{3}{x}-2x>0$, 2) $2x-1>0$, 3) $0<\cos x^2<1$.

При таких x исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{3}{x}-2x>2x-1.$$

Осталось решить систему четырех неравенств:

1) $\frac{3}{x}-2x>0$, 2) $2x-1>0$, 3) $0<\cos x^2<1$, 4) $\frac{3}{x}-2x>2x-1$.

Из второго неравенства $2x-1>0$, $x>\frac{1}{2}$. Теперь мы можем домножить первое неравенство на x: $3-2x^2>0, x^2<\frac{3}{2}$. Поскольку $\pi>3$ и $x^2<\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$, то $0<x^2<\frac{\pi}{2}$ и неравенство $0<\cos x^2<1$ выполняется автоматически. Последнее неравенство можно также домножить на x: $3-4x^2+x>0$, откуда $-\frac{3}{4}<x<1$. Сопоставляя три неравенства: $x>\frac{1}{2}$, $x^2<\frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{4}<x<1$, находим ответ: $\frac{1}{2}<x<1$.

4. Ответ: $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9\operatorname{tg}\alpha}\left(\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^9\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^{15}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Экономический факультет (дневное отделение)

Вариант

1. Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен 150 *куб. см*, площадь полной поверхности равна 280 *кв. см*, периметр основания равен 40 *см*. Найти размеры бруска.

2. В квадрате $ABCD$ площади 1 сторона AD продолжена за точку D и на продолжении взята точка O на расстоянии 3 от точки D. Из точки O проведены два луча. Первый луч пересекает отрезок CD в точке M и отрезок AB в точке N, причем длина отрезка ON равна a. Второй луч пересекает отрезок CD в точке L и отрезок BC в точке K, причем $\angle BKL=\alpha$. Найти площадь многоугольника $BKLMN$.

3. Решить уравнение $\log_2\log_2 x=\log_4\log_4 2x$.

4. Решить уравнение $|z|\cdot i-z=1+2i$.

Решения задач

1. Обозначим стороны основания бруска через x (*см*) и y (*см*), а высоту бруска через z (*см*). Пусть для определенности $x\geqslant y$. Тогда

$$\begin{cases} xyz=150,\\ 2(xy+yz+xz)=280,\\ 2(x+y)=40,\\ x\geqslant y.\end{cases} \qquad (*)$$

Из первого и третьего уравнений $xy=\frac{150}{z}$ и $x+y=20$. Подставив эти выражения во второе уравнение, получим уравнение относительно z: $\frac{15}{z}+2z=14$, откуда $z_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{19}}{2}$. Теперь нам известны сумма $x+y$ и произведение $xy=\frac{150}{z}$ чисел x и y, значит, x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-20t+\frac{300}{7\pm\sqrt{19}}=0$. Решая его, находим

$$t_{1,2}=10\pm\sqrt{100-\frac{300}{7\pm\sqrt{19}}}$$

При $z=\frac{7-\sqrt{19}}{2}$ дискриминант этого уравнения отрицателен: $100-\frac{300}{7-\sqrt{19}}<100-\frac{300}{7-4}=0$, а при $z=\frac{7+\sqrt{19}}{2}$ дискриминант положителен и меньше 100. При этом значении z $t_1>0$, $t_2>0$, то есть $x>0$, $y>0$. Легко видеть, что числа $z=\frac{7+\sqrt{19}}{2}$, $x=10+\sqrt{100-\frac{300}{7+\sqrt{19}}}$, $y=10-\sqrt{100-\frac{309}{7+\sqrt{19}}}$ действительно являются решением системы (*).

О т в е т: стороны основания равны $10\pm\sqrt{100-\frac{300}{7+\sqrt{19}}}$, высота равна $\frac{7+\sqrt{19}}{2}$.

Почти ни у кого из абитуриентов составление правильной системы уравнений в этой задаче не вызвало затруднений. Однако решение полученной системы многим оказалось не под силу. Некоторые абитуриенты, найдя два значения z, формально находили соответствующие значения x и y, не заботясь о том, что в одном из указанных ими ответов x и y не являются действительными числами.

2. О т в е т: $\quad S_{BKLMN} = 1 + \dfrac{(1+3\operatorname{tg}\alpha)^2}{2\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{7}{8}\sqrt{a^2-16}$.

3. $\log_2\log_2 x = \log_4\log_4 2x$, $\log_4(\log_2 x)^2 = \log_4\log_4 2x$, $(\log_2 x)^2 = \log_4 2 + \frac{1}{2}\log_2 x$,

$$(\log_2 x - 1)\left(\log_2 x + \frac{1}{2}\right) = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*), как легко видеть, является следствием исходного, то есть всякий корень исходного уравнения удовлетворяет (*). Найдя корни (*) и проверив их подстановкой в исходное уравнение, получаем о т в е т: $x = 2$.

4. Запишем комплексное число z в виде $z = x + iy$, где x, y — действительные числа. По определению $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, в частности, $|z|$ — действительное число. Перепишем уравнение в виде $|z|\cdot i - (x+iy) = 1+2i$. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда у них равны действительные и мнимые части. Поэтому решаемое уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} -x = 1, \\ |z| - y = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = -1$, поэтому $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+y^2}$, и для определения y получаем уравнение $\sqrt{1+y^2} = y+2$. Возведя обе части в квадрат и сделав проверку, находим $y = -\frac{3}{4}$, то есть $z = -1 - \frac{3}{4}i$.

Хотя для решения задачи 4 не требуется знаний, выходящих за рамки «Программы вступительных экзаменов по математике для поступающих в высшие учебные заведения СССР», с этой задачей абитуриенты справились очень плохо. Большинство поступавших обнаружило незнание определений модуля комплексного числа и равенства комплексных чисел.

Психологический факультет (вечернее отделение)

Вариант

1. Найти все действительные значения a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+ax+a=0$ действительны и удовлетворяют соотношениям $x_1 < x_2$, $x_1^2 x_2 = a^2$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{x}} \log_{\frac{x+1}{x}} \frac{x}{3} \leqslant \log_{\frac{x-1}{x}} \log_{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{x}{2} - 1\right).$$

3. Садовник при сдельной работе первый день работал так: полдня копал яму, следующие полдня сажал кусты; заработал 3 рубля. На другой день он полдня сажал кусты и полдня косил траву; заработал за этот день 2,5 рубля. На третий день он полдня копал яму и полдня косил траву; заработал 3,5 рубля. Сколько он заработает денег, если весь день будет косить траву?

4. В тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, вписан шар. Найти отношение площади его поверхности к площади поверхности тела, зная, что один из острых углов треугольника равен α.

Решения задач

1. По теореме Виета $x_1x_2 = a$. Поэтому, если $x_1(x_1x_2) = a^2$, то $x_1a = a^2$, или $a(x_1 - a) = 0$. Ясно, что $a \neq 0$, так как при $a = 0$ $x_1 = x_2 = 0$ и условие $x_1 < x_2$ не выполнено. Значит, $x_1 - a = 0$, $x_1 = a$. Но

$x_1x_2 = a \neq 0$, поэтому $x_2 = 1$. Опять по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -a,$$

поэтому $1 + a = -a$, откуда $a = -\frac{1}{2}$. Но решение задачи на этом не окончено.

Проверка. При $a = -\frac{1}{2}$ корни нашего уравнения равны 1 и $-\frac{1}{2}$. Возьмем $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$. Тогда $x_1 < x_2$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$, то есть $x_1^2 x_2 = a^2$ и значение $a = -\frac{1}{2}$ удовлетворяет всем условиям задачи. Ответ: $a = -\frac{1}{2}$.

2. Чтобы обе части неравенства имели смысл, необходимо и достаточно выполнения следующих неравенств:

1) $\frac{x}{3} > 0$; 2) $\frac{x}{2} - 1 > 0$;

3) $\frac{x+1}{x} > 0$, $\frac{x+1}{x} \neq 1$;

4) $\frac{x-1}{x} > 0$, $\frac{x-1}{x} \neq 1$;

5) $\log_{\frac{x+1}{x}} \frac{x}{3} > 0$;

6) $\log_{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{x}{2} - 1\right) > 0$.

Из 1) и 2) следует, что $x > 2$. Из $x > 2$ следует, что $\frac{x+1}{x} > 1$ и $\frac{x-1}{x} < 1$; значит, 3) и 4) выполняются автоматически. Поскольку при $x > 2$ $\frac{x+1}{x} > 1$от, 5) эквивалентно неравенству $\frac{x}{3} > 1$ или $x > 3$, а 6) эквивалентно неравенству $\frac{x}{2} - 1 > 1$ или $x > 4$. Таким образом, ОДЗ задается неравенством $x > 4$.

Поскольку $\frac{x-1}{x} < 1$ и $\frac{x+1}{x} > 1$ при $x > 4$, то исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$\log_{\frac{x+1}{x}} \frac{x}{3} \geqslant \log_{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{x}{2} - 1\right),$$

а последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{x}{3} \geqslant \frac{x}{2} - 1,$$

решая которое, находим $x \leqslant 6$. Учитывая ОДЗ, получаем окончательный ответ: $4 < x \leqslant 6$.

3. Ответ: 3 рубля.

4. Ответ: $\frac{2\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^3}$.

Экономический факультет (вечернее отделение)

Вариант

1. Из разных концов вагона движущегося поезда навстречу друг другу выходят два человека. Первый движется в сторону головного вагона поезда и имеет относительно вагона скорость 0,5 *м/сек*. Второй имеет относительно земли скорость 63 *км/ч*. Через 5 *сек* после начала движения расстояние между ними сокращается до одной пятой длины вагона и составляет одну сороковую часть пути, проходимого поездом за 5 *сек*. Найти скорость поезда.

2. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах $AB=6$ и $BC=8$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен отрезку AC. Известно, что периметр многоугольника $AMNCD$ относится к периметру треугольника MBN, как 7 : 3. Найти длину отрезка MN.

3. Решить уравнение $\sin x+\sin 4x+\sin 7x=0$.

4. Решить неравенство $2^{2x-1}>1-2^{x-1}$.

Решения задач

1. Ответ: скорость поезда равна $\frac{170}{9}$ *м/сек* $\approx 18{,}9$ *м/сек*.

2. По условию задачи $MN \parallel AC$, поэтому $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$. В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны: $\frac{MB}{BN}=\frac{AB}{BC}$. Но $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4}$, поэтому удобно взять $MB=3x$, тогда $BN=\frac{4}{3}MB=4x$. Выражая периметры $AMNCD$ и MBN через x, получаем уравнение $\frac{28-2x}{12x}=\frac{7}{3}$, откуда $MN=5x=\frac{14}{3}$. Ответ: $MN=\frac{14}{3}$.

3. Ответ: $x=\frac{\pi n}{4}$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$, $x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

4. Ответ: $x>0$.

Наиболее распространенными ошибками в этом варианте были ошибки в решении простейших тригонометрических и показательных уравнений, к которым приводятся задачи 3 и 4. Так, например, многие абитуриенты неверно решили уравнение $\sin 4x=0$ в задаче 3 и уравнение $2^x=-2$ в задаче 4.

В заключение предлагаем несколько задач из других вариантов для самостоятельного решения.

Дневное отделение психологического факультета

1. Найти все отличные от нуля действительные значения a, при которых уравнение $x(x^{12}-ax^6+a^4)=0$ имеет ровно пять действительных корней, образующих арифметическую прогрессию.

2. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $\log_{\cos x^2}\left(\frac{5}{2x}-2x\right)>\log_{\cos x^2}(2x-1)$.

Вечернее отделение психологического факультета

3. Найти все действительные значения a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+ax+1=0$ действительны и удовлетворяют соотношениям $x_1<x_2$, $x_1+2x_2=4$.

4. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{4}}}}\log_{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\left(x-\frac{3}{4}\right)\leqslant\log_{\sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{4}}}}\log_{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}(2-x).$$

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ АБИТУРИЕНТОВ

22 декабря 1970 года в Московском институте стали и сплавов ректорат совместно с кафедрой высшей математики провел совещание преподавателей математики средних школ города Москвы, посвященное обсуждению математической подготовки абитуриентов технических вузов.

С совместным докладом «О необходимом уровне математической подготовки абитуриентов» выступили зав. кафедрой высшей математики профессор И. Е. Базилевич и профессор М. А. Акивис. В докладе было отмечено, что при изучении курса высшей математики во втузе особенно часто приходится использовать следующие разделы школьного курса математики: преобразования алгебраических и тригонометрических выражений, свойства основных элементарных функций и их графики, решение различного рода уравнений, неравенств и систем уравнений или неравенств, понятия абсолютной величины действительного числа и арифметического корня, основные теоремы и формулы геометрии и т. д.

Однако именно этими разделами плохо владеют многие абитуриенты и студенты первых курсов. Докладчики подчеркнули, что многие абитуриенты не умеют правильно и грамотно оформлять свои работы, что связано с неумением четко и последовательно мыслить.

В заключение доклада были сформулированы некоторые положения, выполнение которых должно способствовать повышению уровня математической подготовки абитуриентов:

а) на протяжении всего обучения математике в средней школе следует обращать внимание на логическую обоснованность и стройность курса; учащиеся должны уметь правильно мыслить, рассуждать и грамотно оформлять свои мысли;

б) при решении разного рода уравнений и неравенств следует использовать понятие области допустимых значений и приучать учащихся следить за изменением этой области при тех или иных преобразованиях;

в) особое внимание надо обратить на технику тождественных преобразований алгебраических и тригонометрических выражений; следует требовать запоминания основных формул алгебры, тригонометрии и геометрии;

г) следует добиваться твердого знания свойств и графиков основных элементарных функций; эти свойства должны использоваться при решении уравнений и неравенств;

д) при решении геометрических задач учащиеся должны уметь делать правильный чертеж и проводить четкое обоснование всех построений и вычислений;

е) действующая школьная программа по математике не содержит некоторых тем, знание которых желательно при изучении курса математики во втузе. К ним относятся теория соединений, бином Ньютона, теорема Безу и решение двучленных уравнений. Эти темы следует включать в тематику факультативных занятий по математике. Кроме того, на этих занятиях следует более глубоко, чем это предусмотрено программой, изучать комплексные числа и обратные тригонометрические функции.

В докладе доцента В. В. Гольдберга были освещены наиболее распространенные ошибки, допускаемые абитуриентами на приемных экзаменах.

Наибольшее число ошибок в работах абитуриентов встречается при решении показательных и логарифмических уравнений и особенно неравенств; уравнений и неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины; при записи общего вида углов, соответствующих данному значению тригонометрических функций, и особенно при решении простейших тригонометрических неравенств; при построении графиков простейших трансцендентных функций.

Часто приходится встречаться с ошибками логического характера, особенно в курсе геометрии: учащиеся путают теорему с определением, прямую теорему с обратной; свойства некоторых частных классов фигур переносят на более общие классы (считают, что всегда медиана совпадает с биссектрисой или высотой треугольника, и т. п.); не владеют методом математической индукции; не видят необходимости в доказательстве свойств некоторых функций (тригонометрических, показательной, логарифмической).

Еще раз было обращено внимание на плохое оформление письменных работ многими абитуриентами. При записи решения задач отсутствует логическая последовательность, ряд необходимых обоснований (особенно в геометрии) оказывается пропущенным.

Докладчик указал ряд конкретных ошибок, допущенных абитуриентами при решении письменных работ в 1970 году.

При решении иррационального уравнения

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$$

многие абитуриенты после возведения в куб заменяли $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ на $\sqrt[3]{x-1}$, приобретая при этом посторонний корень ($x=0$).

При решении неравенств часто делаются преобразования, приводящие к посторонним решениям. Эти посторонние решения отбросить с помощью проверки трудно, поскольку они могут заполнять целый промежуток.

Так, решая неравенство

$$x>\sqrt{2x+24}$$

возведением в квадрат, многие получали ответ $x>6, -12<x<-4$, не замечая, что все значения x из второго промежутка не удовлетворяют данному неравенству (этого не случилось бы, если бы поступающие заметили, что из условия вытекает неравенство $x>0$). При решении неравенства

$$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant(x^2+x+1)^3$$

многие правильно видели, что надо рассмотреть случаи $x^2+x+1>1$ и $0<x^2+x+1<1$, но забывали, что, поскольку неравенство нестрогое, решениями его будут и те значения x, для которых $x^2+x+1=1$, то есть $x=0$ и $x=-1$.

Неумение правильно оперировать с абсолютной величиной и арифметическим корнем приводило к многочисленным ошибкам. Так, например, решая уравнение

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{2}\cos 3x,$$

где

$$\pi<x<\frac{3}{2}\pi,$$

многие писали

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sin x+\cos x$$

вместо правильного

$$\sqrt{1+\sin 2x}=|\sin x+\cos x|=$$
$$=-\sin x-\cos x,$$

поскольку $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$.

При упрощении выражения

$$\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

при $x=4(a-1)$, $1<a<2$ приходилось преобразовывать выражение $\sqrt{(a-2)^2}$, Многие при этом писали

$$\sqrt{(a-2)^2} = a-2$$

вместо правильного

$$\sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = 2-a,$$

так как $1 < a < 2$.

Основным недостатком при решении тригонометрических уравнений было плохое знание тригонометрических формул, неумение решать простейшие тригонометрические уравнения.

Решая уравнение

$$\frac{1+\operatorname{tg} x + \ldots + \operatorname{tg}^n x + \ldots}{1-\operatorname{tg} x + \ldots + (-1)^n \operatorname{tg}^n x + \ldots} = 1 + \sin 2x,$$

некоторые поступающие вообще не знали, что делать с левой частью этого уравнения. Те же, кто видел там две бесконечно убывающие геометрические прогрессии, правильно писали, что левая часть имеет смысл, если $|\operatorname{tg} x| < 1$, то есть $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$, но, решив уравнение, оставляли обе серии решений:

$$x_1 = k\pi \text{ и } x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 2x$$

многие решали нерационально, выражая $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{tg} 3x$ через $\operatorname{tg} x$, в результате получали сложное алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg} x$. Быстрее же всего приводило к цели такое преобразование:

$$3(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 3x\,(1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x),$$

и, поскольку в ОДЗ $1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \neq 0$,

$$3\,\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 3x,$$

или $-3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$.

При решении уравнения

$$8 \cos^4 x = 3 + 5 \cos 4x$$

часть поступавших приходила к уравнению четвертой степени относительно $\cos x$, решить которое им не удавалось. Этого не случилось бы, если бы они свели данное уравнение к алгебраическому уравнению относительно $y = \cos 2x$.

При таком решении получается квадратное уравнение

$$2y^2 - y - 1 = 0.$$

При решении геометрических задач, кроме указанных выше логических ошибок, докладчик отметил неграмотные чертежи (неверное изображение осевого сечения конуса, полюсов шара — по этому поводу см. статью Н. М. Бескина в нашем журнале № 12 за 1970 год), незнание свойств пирамиды с равнонаклонными ребрами или гранями, неумение построить линейный угол двугранного угла между смежными боковыми гранями пирамиды или найти центры вписанного и описанного около пирамиды шаров. Большие трудности вызывают у абитуриентов задачи, где даны нелинейные элементы (площадь, объем) или дано соотношение между какими-то элементами (сумма катетов, отношение боковой и полной поверхностей и т. п.).

В конце совещания от имени учителей выступили ученый секретарь секции средней школы Московского математического общества А. Я. Маргулис и старший методист по математике Института усовершенствования учителей С. М. Гуль, которые, в частности, указали на безусловную полезность таких совещаний и пожелали, чтобы подобные совещания проводились и в будущем.

М. Л. Смолянский,
Г. Н. Дьяченко,
В. В. Гольдберг

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МАРИИ И ПЬЕРУ КЮРИ

Мария Склодовская-Кюри (1867—1934) родилась в Варшаве. В 1833 году окончила с золотой медалью гимназию, но не могла получить в Польше высшего образования. С большим трудом ей удалось поступить в 1891 году в Парижский университет.

С 1895 года Мария Склодовская работала в лаборатории известного французского физика и химика Пьера Кюри (1859—1906), женой которого она стала. В 1897 году М. Кюри занялась изучением открытого французским ученым Анри Беккерелем излучения солей урана. Заинтересовавшись работами жены, в них вскоре принял участие и Пьер Кюри. Совместные исследования Марии и Пьера привели в 1898 году к открытию полония (названного в честь родины Марии — Польши) и радия.

Супруги Кюри впервые установили, что радиоактивные лучи вызывают изменения в клетках живых организмов

После смерти мужа, в 1906 году, Мария Кюри заняла его место профессора и заведующего кафедрой в Парижском университете, где была первой женщиной профессором, и впервые начала читать курс лекций по радиоактивности.

За свои работы, сыгравшие огромную роль в создании современной физики, Мария Кюри была избрана членом академий наук многих стран. В 1907 году она была избрана членом-корреспондентом Петербургской Академии наук, а в 1926 году — почетным членом Академии наук СССР. В 1903 году Марии Кюри совместно с Анри Беккерелем и Пьером Кюри была присуждена Нобелевская премия; в 1911 году ей присуждают эту премию вторично.

Первая марка с портретом Марии Кюри вышла в 1935 году в Турции. В 1938 году в честь 40-летия открытия радия вышли марки во Франции, французских колониях (21 страна), Афганистане и на Кубе с изображением Марии и Пьера Кюри, рассматривающих пробирку с открытым ими радием (рисунок всех марок одинаковый; на фото приведена французская марка).

Марку с портретом Марии и Пьера Кюри в 1938 году выпустило княжество Монако. Портрет Марии Кюри изображен также на марке Суринама (выпуск 1950 г.). Много марок, посвященных Марии Кюри, вышло на ее родине, в Польше. Первые из этих марок с портретом Марии Кюри

(1947 г.) вы видите на фото (марка голубого цвета вошла также в блок, посвященный выдающимся деятелям польской культуры). Марки с портретом Марии Кюри выходили в Польше также в 1951, 1963 и 1967 годах (последние две марки приведены на фото). Кроме того, в Польше в 1955 и в 1967 годах выпущены марки с изображением памятника Марии Кюри в Варшаве и марка, посвященная присуждению ей Нобелевской премии в 1903 и 1911 годах.

На фото приведены также марки с портретами Марии Кюри, выпущенные во Франции и ГДР к 100-летию со дня ее рождения.

Марки, посвященные Марии и Пьеру Кюри, выходили в Панаме и в 1963 году были выпущены в Афганистане. В 1956 году, к 50-летию со дня смерти Пьера Кюри, в Советском Союзе и Болгарии вышли марки с его портретом. На фото представлена также шведская марка, выпущенная в 1963 году и посвященная лауреатам Нобелевской премии 1903 года — Пьеру и Марии Кюри и Анри Беккерелю.

А. В. Алтыкис

Рецензии.
Библиография

ПОЛЕЗНАЯ КНИГА

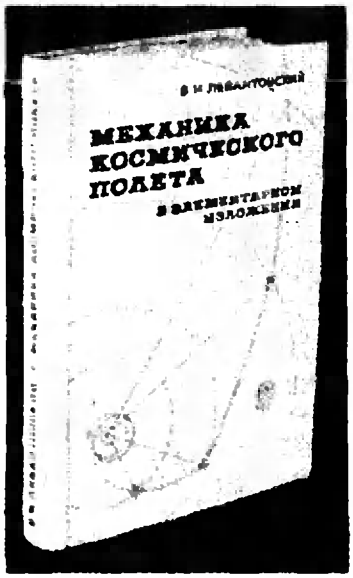
Разностороннее изучение космического пространства, исследование Луны и планет, планирование, подготовка и осуществление космических полетов разнообразного научного назначения — все это потребует в ближайшем будущем усилий многих тысяч людей. Немало нынешних школьников будут заниматься этими вопросами.

Тем учащимся старших классов, которых увлекают физико-математические и технические проблемы космонавтики, большую пользу принесет недавно вышедшая из печати книга В. И. Левантовского по механике космического полета *). Отметим сразу, что эта книга — не для занимательного чтения на сон грядущий. Работа над ней потребует от читателя известного напряжения, читать ее необходимо не запоем, а умеренными дозами, с бумагой и карандашом в руках. Но несомненно, что такая затрата сил и времени окупится сторицей.

Говорят, что два чудовища грозят каждой научно-популярной книге: это Сцилла ненаучности и Харибда недоступности.

Приятно отметить, что данная книга, несмотря на сложность рассматриваемых в ней проблем, не только написана достаточно доступно, но и на хорошем научном уровне. Многие вопросы, затронутые в книге, требуют для обстоятельного изложения привлечения довольно громоздкого (и значительно превышающего возможности школьников) математического аппарата. Однако автору

*) В. И. Левантовский. Механика космического полета в элементарном изложении. М., «Наука», 1970. Тираж 15 000 экз.



удалось в каждом случае изложить сущность вопроса, не увлекаясь математическими выкладками. Как сообщается в предисловии, автор «стремился не злоупотреблять формулами, памятуя о том, что часто за деревьями формул бывает трудно увидеть лес идей». И «лес идей» действительно отчетливо просматривается в данной работе.

Основной предмет книги — это траекторные задачи космонавтики: анализ космических траекторий, их выбор и их эволюция. Остановимся подробнее на содержании книги.

Небольшое «Введение» вкратце раскрывает смысл понятий «космодинамика», содержит обзор наиболее необходимых для дальнейшего изложения сведений из школьного курса механики.

В первой части («Основы ракето- и космодинамики») в главе 1 читатель получит содержательное представление о том, как производится расчет тяги и скорости космической ракеты; он узнает, почему оказалось необходимым использование составных ракет, ознакомится с различными видами космических двигательных систем. Две другие главы первой части рассказывают об особенностях полета космического аппарата на «активном» участке (участок выведения на орбиту) и на «пассивном» участке (свободный полет с выключенным двигателем лишь под действием сил тяготения), о способах расчета космических траекторий в поле тяготения одного или нескольких притягивающих тел.

Остальные четыре части книги соответствуют различным этапам завоевания космоса: «Околоземные полеты», «Полеты к Луне», «Межпланетные полеты», «Межзвездные полеты».

За первое десятилетие космической эры было запущено более 600 искусственных спутников Земли. Об особенностях их траекторий, о различных «возмущающих» факторах, влияющих на эти траектории, повествует вторая часть книги. Здесь читатель узнает, как сказывается сплюснутость, несферичность Земли на характере орбиты спутника. А через несколько страниц читатель встретится с неожиданными результатами влияния атмосферы на движение спутника. Доходчиво объясняется, почему из-за сопротивления атмосферы скорость спутника не уменьшается, а возрастает; почему для уменьшения разогрева пилотируемого спутника (при прохождении через атмосферу) его передняя часть должна быть не заостренной, а затупленной. Отдельные параграфы посвящены неожиданным результатам влияния притяжения Луны и Солнца, давления солнечного света и других факторов на траектории и судьбы спутников.

Привлекая богатый фактический материал об уже запущенных спутниках, автор рассказывает о космических маневрах (переход спутника с одной орбиты на другую, встреча на орбите и пр.), о разнообразных практических и научных применениях спутников.

Третья часть книги освещает многие стороны проблемы полета к Луне: различные траектории попадания в Луну, облет Луны, запуск искусственных спутников Луны, полет человека на Луну и освоение Луны. Читатель найдет здесь подробное описание важнейших полетов, совершенных советскими и американскими космическими аппаратами.

Изучение планет солнечной системы средствами космонавтики было начато в 1961—1962 годах, когда были запущены советские межпланетные станции «Венера-1» (февраль 1961 года) и «Марс-1» (ноябрь 1962 года). За этим последовал запуск ряда других советских и американских «межпланетных зондов». В четвертой части рецензируемой книги не только подробно описаны эти полеты, но нарисованы перспективы будущих полетов к различным планетам, их спутникам, к астероидам и кометам, создания искусственных спутников планет и осуществления межпланетных экспедиций. В отдельной главе описаны полеты с малой тягой (в частности, перелеты с помощью солнечного паруса).

Полеты за пределы солнечной системы к другим звездным мирам; фотонная ракета как средство для выполнения такого полета; релятивистские эффекты, с которыми столкнутся покорители галактик — вот предмет последней, пятой (и самой короткой) части книги.

Книга написана живым и выразительным языком, в ней большое число интересных фактов, рисунков, замечаний. Мы уверены, что читатель прочтет ее не только с пользой, но и с удовольствием.

М. Б. Балк

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «О задачах по фотометрии»

1. Так как изображение получается на бесконечном удалении от линзы, его сила света, очевидно, должна считаться бесконечной. Но и любая площадка, освещенность которой может нас заинтересовать, бесконечно удалена от изображения источника света. Освещенность любой площадки, параллельной плоскости линзы, если, конечно, эта площадка находится в пучке света, выходящем из линзы, равна освещенности самой линзы, независимо от расстояния между линзой и площадкой.

2. $\frac{I}{H^2(n+1)^2}$, причем мы пренебрегли отражением света на границе воды и воздуха.

3. $$\frac{a\frac{b+c}{2}}{a+\frac{b+c}{2}}=\frac{a(b+c)}{2a+b+c}.$$

4. При изменении расстояния от 5 до 10 *км* все время на линзу попадал весь свет от лазера за вычетом поглощенного воздухом (в этом нетрудно убедиться, проделав соответствующие геометрические расчеты). Следовательно, полная мощность лазерного пучка за 5 *км* упала в 2 раза. За 10 *км* (от 10 до 20) она упадет в 4 раза. Кроме того, начиная с 10 *км*, линза приемника уже не перехватывает весь пучок. По закону обратных квадратов даже в абсолютно прозрачной атмосфере сигнал на 20 *км* должен быть в 4 раза слабее, чем на 10 *км*. Значит, в целом сигнал при изменении растояния с 10 до 20 *км* упадет в 16 раз.

К статье «Вступительные экзамены по математике в Московском текстильном институте в 1970 году»

1. $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)\ (k=0, \pm 1, \ldots)$.

2. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{4}$.

3. $\sqrt[6]{a}$.

4. $V=\frac{1}{24}a^3\operatorname{tg}\varphi$.

5. $$x=\frac{(-1)^n\arcsin(\sqrt{3}-1)}{2}+\frac{\pi n}{2}\ (n=0, \pm 1, \ldots).$$

6. $x_1=\frac{\pi}{15}(3k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(3n+2)$ $(k, n=0, \pm 1, \ldots)$.

7. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k=0, \pm 1, \ldots)$.

8. $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

9. -2.

10. $x_1=3$, $x_2=3\log_6 2$.

11. $x_1=10$, $x_2=0{,}1$.

12. $x_1=10^3$, $x_2=10^{-6}$.

13. $x=2$.

14. $x_1=\log_3\frac{28}{27}$, $x_2=\log_3 10$.

15. $x>3$.

16. $-1<x<1$.

17. $0<x<1$; $x>100$.

18. $1<x<2$.

19. $-3<x<2$.

20. $1<x<2$; $x>3$.

21. $a_1=2$, $a_2=\frac{2}{35}$.

22. $2\sqrt{\frac{a}{x^3}}$.

24. $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$.

К статье «Письменный экзамен по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1970 году»

1. $a=\frac{8}{65}$.

2. $\frac{\sqrt{41}+1}{8}<x<\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $a=-3+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $1\frac{3}{8}<x<2$.

КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

У НАС В ГОСТЯХ ВАСЯ СМЕКАЛКИН

Уже четыре года, как ленинградская детская газета «Ленинские искры» проводит математическую олимпиаду для учащихся первых, вторых и третьих классов школ Ленинграда и Ленинградской области. Задачи олимпиады, их решения и фамилии победителей печатаются в газете регулярно на страничке «Ребятам-октябрятам».

Руководит олимпиадой Вася Смекалкин. Попробуйте решить несколько задач Васи Смекалкина.

Сколько медалей?

На олимпийских играх наши спортсмены завоевали 96 медалей, из них 65 золотых и бронзовых, а золотых и серебряных —61.

Сколько золотых, серебряных и бронзовых медалей получили они в отдельности?

Попробуйте разделить

Можно ли три яблока разделить между двумя отцами и двумя сыновьями так, чтобы каждому досталось ровно по одному яблоку?

Сколько конфет было у Саши?

В день своего рождения Саша принес в класс кулек конфет.

— Сколько у тебя конфет? — спросили ребята.

— Я помню,— сказал Саша,— когда я их раскладывал парами, тройками и четверками, то каждый раз оставалась одна лишняя, а когда раскладывал пятерками, лишней не было.

Сколько конфет принес Саша?

60 ступенек до Нины. А до Тани?

Нина живет на четвертом этаже, а Таня — на втором. Нина поднимается на 60 ступенек. На сколько ступенек поднимается Таня?

Где какие шарики?

В трех ящиках лежит по одному шарику: белый, черный и зеленый. На первом ящике надпись: «белый», на втором —«черный», а на третьем — «белый или зеленый». Но ни одна надпись не соответствует действительности.

Как расположить одним приемом?

На столе стоят в ряд три стакана пустых и три с молоком. Их нужно расположить так, чтобы пустые стаканы чередовались с наполненными. Для этого разрешается взять только один стакан. Как это сделать?

Какие цифры поставить?

Вместо крестиков поставьте цифры в действии умножения:

$$\begin{array}{r} ** \\ 8* \\ \hline *** \\ ** \\ \hline **** \end{array}$$

Сколько денег у Коли?

Если Коля купит одну конфету, то у него останется одна копейка, а если он захочет купить 2 конфеты, то у него не хватит одной копейки. Сколько денег у Коли?

В. М. Розентуллер

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор С. Я. Шкляр
Корректор М. Л. Медведская

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 25/III 1971 г.
Подписано в печать 19/V 1971 г.
Бумага 70×100$^{1}/_{16}$ Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,67.
Тираж 263 290 экз. Т-06590.
Цена 30 коп. Заказ 650

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Чехов Московской обл.

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 7

Перед вами план города. Можно ли составить маршрут прогулки так, чтобы пройти по каждому мосту только один раз?